

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 giugno 1905.

F. D'OVIDIO, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Contributo allo studio delle distorsioni dei solidi elastici.* Nota del Socio VITO VOLTERRA.

1. Uno dei risultati a cui sono giunto nelle Note precedenti⁽¹⁾ relative all'equilibrio dei solidi elastici più volte connessi è stato il seguente.

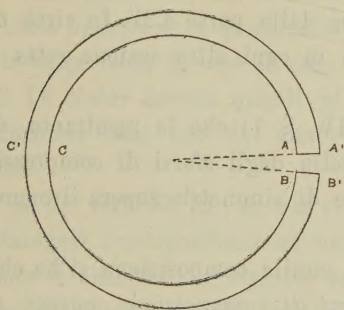


FIG. 1. — Fessura radiale.

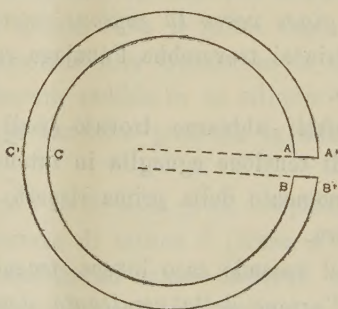


FIG. 2. — Fessura uniforme.

Abbiasi un anello simmetrico rispetto ad un asse (fig. 1). Se ne asporti in AA' BB' una sottile fetta, la cui grossezza varii proporzionalmente alla distanza dall'asse (chiameremo ciò fare una *fessura radiale*), quindi si accostino le faccie AA' e BB' della fessura, si saldino e si lasci libero l'anello.

⁽¹⁾ Sedute del 5 febbraio, 19 febbraio, 2 aprile, 16 aprile 1905.

Le faccie saldate *non sono tese, ma in parte tese ed in parte compresse e la somma delle forze di compressione è eguale alla somma delle forze di tensione* (vedi Nota IV, §§ 1, 7).

Anche se asportiamo in AA' BB' (fig. 2) una sottile fetta a faccie parallele ed equidistanti dall'asse dell'anello (*fessura uniforme*) e saldiamo le faccie, abbandonando a sè il corpo, si ha che *le faccie sono in parte tese ed in parte compresse*. Senonchè le condizioni del corpo in equilibrio nel secondo caso sono essenzialmente diverse che nel primo (Nota IV, § 7).

Nel primo caso lo stato di deformazione del corpo è simmetrico rispetto all'asse, in modo che il medesimo stato si sarebbe ottenuto eseguendo, invece che nella primitiva sezione, in un'altra sezione retta qualunque dell'anello (per esempio in quella diametralmente opposta C' C) (fig. 1) *la stessa fessura radiale* e saldando quindi le faccie. Nel secondo caso per ottenere lo stesso stato di deformazione operando una distorsione, anzichè in AA' BB' (fig. 2), nella regione diametralmente opposta, sarebbe convenuto fare un taglio in C' C e *interporre fra le faccie del taglio una zeppa di grossezza uniforme*, come si rileva dal principio dei tagli equivalenti (vedi Nota II, art. I, § 1).

Inoltre la distribuzione degli sforzi è completamente diversa nei due casi. Nel primo caso, se esaminiamo le azioni che AA' esercita sopra BB', dopo la saldatura, e componiamo fra loro tutti gli sforzi di compressione e quindi componiamo fra loro tutti quelli di tensione, abbiamo che *la linea d'azione della risultante dei primi giace verso la regione interna dell'anello*, cioè dalla parte AB, *la linea d'azione della risultante degli altri sforzi giace verso la regione esterna*, cioè dalla parte A'B'. In virtù della simmetria si troverebbe l'analogo risultato in ogni altra sezione retta dell'anello.

Infatti abbiamo trovato (vedi Nota IV, § 7) che la risultante degli sforzi di tensione eguaglia in intensità quella degli sforzi di compressione, ma il momento della prima rispetto all'asse di simmetria supera il momento dell'altra.

Nel secondo caso invece, facendo una simile composizione, si ha che *la linea d'azione della risultante degli sforzi di compressione agenti sulla faccia BB', dopo la saldatura, giace verso la regione esterna dell'anello*, cioè dalla parte A'B'; mentre *la linea d'azione degli sforzi di tensione giace verso la regione interna*, cioè dalla parte AB. Ma l'opposto si trova se eseguiamo l'analoga ricerca in C' C, vale a dire la linea d'azione della risultante degli sforzi di compressione giace dalla parte interna, ossia verso C e la linea d'azione della risultante delle tensioni è dalla parte opposta, cioè verso C'.

Infatti noi abbiamo dimostrato (Nota IV, § 7) che, nel caso del taglio uniforme, in ogni sezione trasversale dell'anello gli sforzi di tensione supe-

rano quelli di compressione e la risultante degli uni e degli altri incontra ortogonalmente l'asse di simmetria dell'anello.

In altri termini nel primo caso della fessura radiale, le fibre circolari dell'anello stirate sono in prevalenza verso la regione esterna e quelle compresse verso la regione interna e ciò lungo tutto l'anello, mentre, nel caso della fessura uniforme, le fibre circolari dell'anello dalla parte destra di esso (fig. 2) sono in prevalenza stirate nella regione interna e compresse nella regione esterna, ed il contrario avviene dalla parte opposta di sinistra dell'anello.

Questi diversi risultati che abbiamo enunciati si ricavano facilmente, sia dal principio dei tagli equivalenti, sia dalla legge di composizione degli sforzi che abbiamo ottenuto nelle Note precedenti. Colla semplice intuizione male si arriverebbe *a priori* ai risultati stessi, anzi alcuni di essi ci appaiono come inaspettati e la ragione di ciò si comprende, quando si osservi che l'esperienza quotidiana ci abitua in generale ad intuire le deformazioni che un corpo subisce allorchè è sollecitato da sforzi conosciuti. Qui invece nessuno sforzo esterno si esercita sul corpo elastico: gli sforzi che lo sollecitano sono solo interni e, per dir così, nascosti all'osservatore, tanto che essi figurano, al pari della deformazione, come incognite del problema.

2. Ho desiderato avere la conferma sperimentale di alcuni dei risultati ottenuti operando sopra solidi di *caoutchouc* coi quali è facile ottenere deformazioni molto sensibili.

Onde poter fare un confronto fra i risultati del calcolo e le esperienze, ho voluto approfondire principalmente in questa Nota il primo degli esempi svolti nella Nota I, cioè il caso corrispondente alla distorsione di ordine 6 (vedi IV Nota) dovuta quindi ad una fessura radiale in un cilindro cavo di rivoluzione, caso che dal punto di vista analitico presenta le minori difficoltà.

3. Le formule (2), in cui si suppone $\gamma = 0$, della Nota I esprimono gli spostamenti corrispondenti ad una distorsione di ordine 6 (*fessura radiale*) quando il cilindro sia soggetto rispettivamente ad azioni uniformi lungo le superficie cilindriche che formano il contorno laterale del corpo e a tensioni che ne sollecitano le basi. Le prime si eliminano facilmente componendo gli spostamenti (2) della Nota I cogli spostamenti

$$u = \lambda \frac{x}{r^2} + \mu x \quad , \quad v = \lambda \frac{y}{r^2} + \mu y \quad , \quad w = 0 ,$$

e scegliendo convenientemente le costanti λ e μ .

In tal modo si giunge agli spostamenti

$$(I) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= -\alpha \left\{ y \operatorname{arco} \operatorname{tg} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \frac{K}{L+2K} x \log r^2 + \right. \\ &\quad + \frac{L+K}{L+2K} R_1^2 R_2^2 \frac{\log R_1^2 - \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \frac{x}{r^2} + \\ &\quad \left. + \frac{x}{2} \left[1 + \frac{K}{L+2K} \frac{R_1^2 \log R_1^2 - R_2^2 \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \right] \right\} \\ v &= -\alpha \left\{ -x \operatorname{arco} \operatorname{tg} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \frac{K}{L+2K} y \log r^2 + \right. \\ &\quad + \frac{L+K}{L+2K} R_1^2 R_2^2 \frac{\log R_1^2 - \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \frac{y}{r^2} + \\ &\quad \left. + \frac{y}{2} \left[1 + \frac{K}{L+2K} \frac{R_1^2 \log R_1^2 - R_2^2 \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \right] \right\} \\ w &= 0 \end{aligned} \right.$$

i quali corrispondono alla ipotesi di una distorsione (d'ordine 6) dovuta ad una fessura radiale la cui apertura angolare è $2\pi\alpha$, mentre il corpo è sollecitato da sole azioni agenti sulle due basi, le quali azioni servono a mantenere le dette basi piane ed alla loro primitiva distanza ⁽¹⁾.

Si possono calcolare facilmente le sei caratteristiche delle tensioni (*strain*) che corrispondono agli spostamenti (I) ed esse risultano:

$$(1) \quad t_{11} = \frac{\alpha(L+K)K}{L+2K} \left\{ \log r^2 + \frac{2y^2}{r^2} - \right. \\ \left. - \frac{R_1^2 R_2^2 (\log R_1^2 - \log R_2^2)}{R_1^2 - R_2^2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4} \right) - \frac{R_1^2 \log R_1^2 - R_2^2 \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \right\}$$

$$(2) \quad t_{22} = \frac{\alpha(L+K)K}{L+2K} \left\{ \log r^2 + \frac{2x^2}{r^2} - \right. \\ \left. - \frac{R_1^2 R_2^2 (\log R_1^2 - \log R_2^2)}{R_1^2 - R_2^2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2y^2}{r^4} \right) - \frac{R_1^2 \log R_1^2 - R_2^2 \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \right\}$$

$$(3) \quad t_{33} = \frac{\alpha L K}{L+2K} \left\{ 1 + \log r^2 - \frac{R_1^2 \log R_1^2 - R_2^2 \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \right\}$$

$$(4) \quad t_{23} = 0$$

$$(5) \quad t_{31} = 0$$

$$(6) \quad t_{12} = -\frac{2\alpha(L+K)K}{L+2K} \frac{xy}{r^2} \left\{ 1 - \frac{R_1^2 R_2^2 (\log R_1^2 - \log R_2^2)}{R_1^2 - R_2^2} \frac{1}{r^2} \right\}$$

⁽¹⁾ Si noti che in queste formule, come in tutte le successive i logaritmi sono *neperiani*.

L'esser nulle t_{23} e t_{31} prova che le forze che si esercitano sulle due basi agiscono normalmente alle basi stesse.

Tale azione sulle basi, assunta come positiva quando è diretta dall'esterno verso l'interno del cilindro, e come negativa quando ha la direzione contraria e riferita alla unità d'area, è espressa da

$$(II) \quad P_{\omega} = t_{33} = \frac{\alpha L K}{L + 2K} \left[1 + \log r^2 - \frac{R_1^2 \log R_1^2 - R_2^2 \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \right].$$

Abbiamo dunque il teorema:

Un cilindro cavo di rivoluzione che ha subito una distorsione (distorsione di ordine 6) dovuta ad una fessura radiale di apertura $2\pi\alpha$ conserva le sue basi piane ed alla loro distanza primitiva mediante delle forze normali agenti sulle basi stesse date dalla formula precedente (II), nella quale R_1 e R_2 rappresentano i raggi delle superficie cilindriche laterali e r la distanza dell'asse dai vari punti delle basi.

4. Ciò premesso, calcoliamo le azioni che si esercitano sopra gli elementi della sezione σ del cilindro eseguita con il mezzo piano spiccato dall'asse del cilindro e che forma col piano xz l'angolo β .

Le (1), (2) e (6) ci forniscono subito le componenti secondo gli assi dell'azione unitaria relativa ad ogni elemento della sezione. Esse sono:

$$-F \sin \beta, \quad F \cos \beta, \quad 0$$

in cui

$$F = -\frac{2\alpha(L+K)K}{L+2K} \left\{ 1 + \log r - \frac{R_1^2 R_2^2 (\log R_1 - \log R_2)}{R_1^2 - R_2^2} \frac{1}{r^2} - \frac{R_1^2 \log R_1 - R_2^2 \log R_2}{R_1^2 - R_2^2} \right\}$$

Questo prova che ogni elemento di σ è sollecitato da una forza normale la cui grandezza unitaria è F .

Un calcolo elementare ci dà:

$$\int_{R_2}^{R_1} F dr = 0.$$

Ne segue che, componendo tutte le azioni che si esercitano sugli elementi di σ , si trova una forza risultante nulla.

Questo risultato verifica, nel caso particolare che trattiamo, il teorema generale dimostrato nella Nota precedente (Nota IV, § 6).

Infatti esso prova che la somma delle compressioni che si esercitano sopra σ è eguale, in valore assoluto, alla somma delle tensioni, e tale condizione evidentemente dovrà seguitare a sussistere anche quando non sollegheremo più le basi del cilindro cavo mediante la forza P_{ω} .

Si può calcolare facilmente il momento rispetto all'asse z delle azioni che sollecitano gli elementi di σ . Esso sarà, denotando con h l'altezza del cilindro:

$$h \int_{R_2}^{R_1} r F dr = - \frac{2\alpha(L+K)K}{L+2K} \left\{ \frac{R_1^2 - R_2^2}{4} - \frac{R_1^2 R_2^2 (\log R_1 - \log R_2)^2}{R_1^2 - R_2^2} \right\} h.$$

5. Poniamo:

$$(7) \quad f(r) = 1 + \log r - \frac{R_1^2 R_2^2 (\log R_1 - \log R_2)}{R_1^2 - R_2^2} \frac{1}{r^2} - \frac{R_1^2 \log R_1 - R_2^2 \log R_2}{R_1^2 - R_2^2}.$$

La funzione $f(r)$ è crescente e siccome

$$\int_{R_2}^{R_1} f(r) dr = 0.$$

così risulta che l'equazione

$$f(r) = 0,$$

ha una sola radice ϱ_1 compresa fra R_2 e R_1 , e avremo che $f(r)$ sarà negativo per i valori di r compresi fra R_2 e ϱ_1 e sarà positivo per i valori compresi fra ϱ_1 e R_1 .

Questo prova che le fibre circolari del cilindro aventi per asse l'asse del cilindro e il cui raggio è compreso fra R_2 e ϱ_1 sono compresse, mentre quelle il cui raggio è compreso fra ϱ_1 e R_1 sono stirate. Le fibre neutre hanno il raggio ϱ_1 .

Dall'equazione $f(r) = 0$ si ricava

$$\log \frac{\varrho_1}{\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{\frac{R_1}{R_2} \log \frac{R_1}{R_2}}{\frac{R_1^2}{R_2^2} - 1} \frac{R_1 R_2}{\varrho_1^2} + \frac{\frac{R_1^2}{R_2^2} \log \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} - \log \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}}{\frac{R_1^2}{R_2^2} - 1} - 1$$

e, posto

$$\frac{R_1}{R_2} = \varepsilon, \quad \log \frac{\varrho_1}{\sqrt{R_1 R_2}} = \varphi,$$

avremo

$$(8) \quad \varphi = \frac{\varepsilon \log \varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} e^{-2\varphi} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2 + 1}{\varepsilon^2 - 1} \log \varepsilon - 1.$$

Sia

$$\gamma = 1 - \frac{1}{\varepsilon} = \frac{R_1 - R_2}{R_1};$$

avremo $0 < \gamma < 1$. Nella espressione (8) sviluppiamo in serie per le po-

tenze ascendenti di γ il coefficiente di $e^{-2\varphi}$ e i termini successivi. Otterremo

$$\varphi(\gamma) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{6} \gamma^2 + \dots \right) e^{-2\varphi} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \gamma^2 + \dots \right),$$

da cui segue

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0, \quad \varphi''(0) = \frac{1}{12},$$

quindi:

$$\varphi(\gamma) = \frac{1}{24} \gamma^2 + \dots,$$

e

$$\frac{\varrho_1}{\sqrt{R_1 R_2}} = e^{\varphi(\gamma)} = 1 + \frac{1}{24} \gamma^2 + \dots,$$

ossia, trascurando le potenze di $\frac{R_1 - R_2}{R_1}$ superiori alla seconda

$$\varrho_1 = \sqrt{R_1 R_2} \left(1 + \frac{1}{24} \left(\frac{R_1 - R_2}{R_1} \right)^2 \right).$$

Se lo spessore del cilindro cavo sarà piccolo rispetto ai raggi, e il rapporto dello spessore al raggio esterno si considererà come una quantità del primo ordine, avremo che *il raggio delle fibre neutre sarà dato da*

$$\varrho_1 = \sqrt{R_1 R_2}$$

a meno di quantità del secondo ordine.

6. Dalla (7) e dall'equazione

$$0 = 1 + \log \varrho_1 - \frac{R_1^2 R_2^2 (\log R_1 - \log R_2)}{R_1^2 - R_2^2} \frac{1}{\varrho_1^2} - \frac{R_1^2 \log R_1 - R_2^2 \log R_2}{R_1^2 - R_2^2}$$

segue

$$f(r) = \log \frac{r}{\varrho_1} + \frac{R_1^2 R_2^2 \log \frac{R_1}{R_2}}{R_1^2 - R_2^2} \left(\frac{r^2 - \varrho_1^2}{r^2 \varrho_1^2} \right).$$

Considerando $\frac{R_1 - R_2}{R_1} = \gamma$ come una quantità piccolissima del primo ordine, con facili calcoli otteniamo, ponendo $r = \varrho_1 + \xi$

$$f(r) = \frac{2\xi}{\sqrt{R_1 R_2}} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{R_1 - R_2}{\left(\frac{R_1 + R_2}{2} \right)} \right),$$

trascurando quantità del secondo ordine.

Ne segue

$$F = - \frac{2\alpha(L + K)K}{L + 2K} \cdot \frac{2\xi}{\sqrt{R_1 R_2}} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{R_1 - R_2}{\left(\frac{R_1 + R_2}{2} \right)} \right).$$

Sia E il modulo di elasticità e η il coefficiente di Poisson. Avremo

$$\frac{(L + K) K}{L + 2K} = - \frac{E}{4(1 - \eta^2)}$$

e, chiamando θ l'apertura angolare del taglio radiale, sarà $\alpha = \frac{\theta}{2\pi}$, quindi

$$(III) \quad F = \frac{E}{2(1 - \eta^2)} \cdot \frac{\theta}{2\pi} \cdot \frac{s}{\varrho} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{s}{\varrho} \right)$$

in cui ϱ è la media (aritmetica o geometrica dei raggi), e s la differenza dei raggi, ossia lo spessore del cilindro cavo.

7. Passiamo adesso ad esaminare la legge di distribuzione delle forze P_ω sulle basi del cilindro.

Poniamo

$$(9) \quad \psi(r) = 1 + \log r^2 - \frac{R_1^2 \log R_1^2 - R_2^2 \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2};$$

con un calcolo elementare si dimostra che

$$(10) \quad \int_{R_2}^{R_1} r \psi(r) dr = 0,$$

ne segue che l'equazione $\psi(r) = 0$ dovrà avere una radice compresa fra R_2 e R_1 ; e siccome $\psi(r)$ è una funzione crescente, così questa radice sarà unica, onde chiamandola ϱ_2 , avremo che $\psi(r)$ sarà negativa per r compresa fra R_2 e ϱ_2 e positiva per r compresa fra ϱ_2 e R_1 .

È facile mostrare che $\varrho_2 > \frac{R_1 + R_2}{2}$.

Abbiamo infatti

$$(11) \quad 1 + \log \varrho_2^2 - \frac{R_1^2 \log R_1^2 - R_2^2 \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} = 0$$

d'onde

$$\log \frac{2\varrho_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_2^2 \log \frac{R_1}{R_2}}{R_1^2 - R_2^2} + \log \frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{1}{2} + \log 2$$

e posto

$$\frac{R_1}{R_2} = \varepsilon, \quad \log \frac{2\varrho_2}{R_1 + R_2} = \chi(\varepsilon),$$

$$\chi(\varepsilon) = \frac{\log \varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} + \log \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1} - \frac{1}{2} + \log 2.$$

Ne segue

$$\chi'(\varepsilon) = \frac{\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} - 2 \log \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon} (\varepsilon^2 - 1)^2} = \frac{\varpi(\varepsilon)}{\frac{1}{\varepsilon} (\varepsilon^2 - 1)^2}$$

Scrivendo come precedentemente (§ 5) $\gamma = 1 - \frac{1}{\varepsilon}$ e sviluppando il logaritmo e quindi $\chi'(\varepsilon)$ in serie di potenze di γ si ha

$$(12) \quad \chi'(\varepsilon) = \frac{\left(\frac{1}{3}\gamma^3 + \dots\right)(1-\gamma)^3}{\gamma^2(2-\gamma)^2} = \frac{1}{12}\gamma + \dots$$

in cui i termini successivi al primo contengono potenze superiori di γ . Se ne deduce

$$\chi'(\varepsilon)_{\varepsilon=1} = 0 \quad \chi(\varepsilon)_{\varepsilon=1} = 0.$$

Ma

$$\varpi(\varepsilon) = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)^2,$$

onde $\varpi(\varepsilon)$, e per conseguenza $\chi(\varepsilon)$, sono positive per $\varepsilon > 1$. Dunque $\chi(\varepsilon)$ per $\varepsilon > 1$ è una funzione crescente. Ma $\lim_{\varepsilon=1} \chi(\varepsilon) = 0$, dunque

$$\log \frac{2q_2}{R_1 + R_2} > 0,$$

ossia

$$q_2 > \frac{R_1 + R_2}{2}.$$

Siccome $\chi(\varepsilon)_{\varepsilon=1} = 0$ dalla (12) si ricava

$$\chi(\varepsilon) = \frac{1}{24}\gamma^2 + \dots$$

e quindi

$$\frac{2q_2}{R_1 + R_2} = e^{\frac{1}{24}\gamma^2 + \dots} = 1 + \frac{1}{24}\gamma^2 + \dots$$

d'onde

$$q_2 = \frac{R_1 + R_2}{2} \left(1 + \left(\frac{R_1 - R_2}{R_1}\right)^2\right)$$

trascurando nell'espressione di q_2 le potenze di $\frac{R_1 - R_2}{R_1}$ superiori alla seconda.

Possiamo perciò concludere che il cerchio il quale separa la regione tesa dalla regione compressa in ciascuna base ha per raggio la media aritmetica dei raggi estremi, a meno di quantità del secondo ordine.

8. Dalle (9) e (11) segue

$$\psi(r) = 2 \log \frac{r}{q_2}$$

quindi per la (II)

$$P_\omega = \frac{2\alpha LK}{L + 2K} \log \frac{r}{q_2}$$

ed introducendo il modulo di elasticità, il coefficiente di Poisson e l'apertura angolare θ della fessura radiale (cfr. § 6)

$$(II') \quad P_{\omega} = - \frac{E\eta}{1 - \eta^2} \cdot \frac{\theta}{2\pi} \log \frac{r}{\varrho_2}.$$

Dunque per mantenere piane ed alla primitiva distanza le due basi del cilindro bisogna comprimerle nella regione compresa fra i cerchi di raggi R_2 e ϱ_2 e stirarle nella regione compresa fra i cerchi di raggi ϱ_2 e R_1 .

Dalla formula (10) si ricava che, presa una striscia radiale qualunque di una delle basi la somma algebrica di tutte le forze agenti sulla striscia stessa è eguale a zero, ossia la *resultante delle tensioni ha la stessa intensità della risultante delle pressioni*. L'insieme quindi di tutte le forze agenti nella striscia radiale è equivalente ad una coppia.

Ponendo $r = \varrho_2 + \xi$ avremo $\left| \frac{\xi}{\varrho_2} \right| < 1$, giacchè $\varrho_2 > \frac{R_1 + R_2}{2}$ (vedi § 7), quindi sarà possibile sviluppare il $\log \frac{r}{\varrho_2}$ in serie di potenze di $\frac{\xi}{\varrho_2}$ onde la (II') si scriverà

$$P_{\omega} = - \frac{E\eta}{1 - \eta^2} \cdot \frac{\theta}{2\pi} \left(\frac{\xi}{\varrho_2} - \frac{1}{2} \frac{\xi^2}{\varrho_2^2} + \frac{1}{3} \frac{\xi^3}{\varrho_2^3} + \dots \right).$$

Se lo spessore del cilindro è piccolo, trascurando i termini del secondo ordine avremo

$$(II'') \quad P_{\omega} = - \frac{E\eta}{1 - \eta^2} \cdot \frac{\theta}{2\pi} \frac{\xi}{\varrho_2}.$$

9. Supponiamo ora di non sottoporre le due basi del cilindro alle azioni P_{ω} e di lasciarle libere e vediamo quale forma assumerà il cilindro. Cerchiamo cioè la forma che prende il cilindro in virtù della sola distorsione, allorchè nessuna forza esterna lo sollecita.

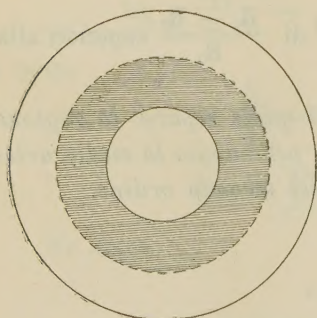


FIG. 3.

la deformazione di un cilindro soggetto sulle due basi alle azioni — P_{ω} .

La figura 3 rappresenta una delle basi del cilindro.

Il cerchio maggiore e il cerchio minore sono i due orli della base; il cerchio punteggiato è la linea di separazione della regione che deve esser tesa dalle forze $-P_\omega$ (la quale è stata tratteggiata) dalla regione che deve essere compressa dalle forze $-P_\omega$ (la quale è stata lasciata in bianco).

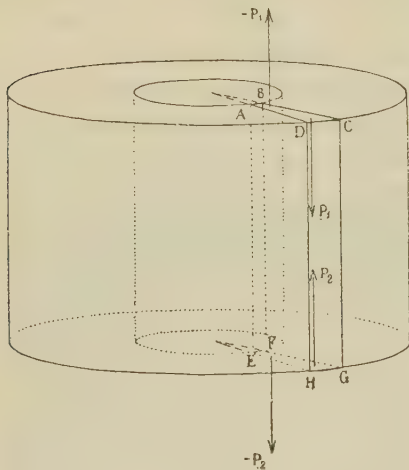


FIG. 4.

Consideriamo ora (fig. 4) una fetta longitudinale ABCDEFGH infinitamente sottile del cilindro cavo, ed immaginiamola staccata dal rimanente del corpo. Secondo ciò che abbiamo trovato nel § 8 la somma delle compressioni agenti sulla base superiore ABCD sarà eguale alla somma delle tensioni e il medesimo avverrà alla base inferiore EFGH, quindi le due basi saranno rispetti-

vamente sollecitate dalle coppie $P_1, -P_1; P_2, -P_2$. Ne segue che la fetta si fletterà in modo che le generatrici della fascia DCGH si curveranno assumendo una *concavità* e le generatrici della faccia ABFG si curveranno pure, ma divenendo *convesse*. Nello stesso tempo la regione della base superiore ABCD adiacente ad AB si *solleverà* e la regione della base stessa adiacente a CD si *abbasserà*. L'inverso avverrà alla base inferiore.

È facile calcolare dalle formule ordinarie della flessione il sollevamento e l'abbassamento e la freccia di flessione relative alla fetta considerata.

Prendiamo per piano di riferimento il piano normale all'asse condotto per il mezzo dell'asse stesso, avremo:

Sollevamento dei punti della base superiore

$$(13) \quad w' = -\frac{1}{E} (-P_\omega) \frac{h}{2} = -\frac{\eta}{1-\eta^2} \cdot \frac{\theta}{2h} \cdot \frac{\xi h}{2\varrho_2}.$$

Abbassamento dei punti della base inferiore

$$(13') \quad w'' = -\frac{1}{E} (-P_\omega) \frac{h}{2} = -\frac{\eta}{1-\eta^2} \frac{\theta}{2\pi} \frac{\xi h}{2\varrho_2}.$$

Freccia di flessione

$$(14) \quad g = -\frac{P_\omega h^2}{E\xi^2 8} = \frac{\eta}{1-\eta^2} \cdot \frac{\theta}{2\pi} \cdot \frac{h^2}{8\varrho_2},$$

nelle quali formule h denota l'altezza del cilindro.

Lo stesso avverrebbe per ogni altra striscia longitudinale infinitamente sottile del cilindro se fosse separata dal resto del corpo. Il collegamento

mutuo delle varie striscie altererà i detti sollevamenti ed abbassamenti rimpicciolendoli e specialmente diminuendo la freccia di flessione, ma l'andamento della deformazione rimarrà evidentemente inalterato e le correzioni da farsi nei valori trovati saranno tanto più piccole quanto più basso sarà il cilindro e minore lo spessore rispetto ai raggi delle basi ⁽¹⁾.

Il primitivo cilindro, che si è rappresentato colla fig. 5, assumerà quindi, in virtù della distorsione, la forma rappresentata dalla fig. 6, nella quale si sono esagerate le deformazioni per renderle più manifestamente visibili.

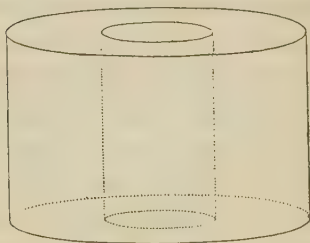


FIG. 5.

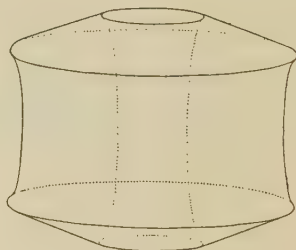


FIG. 6.

Secondo le formule (13), (13'), (14), e prendendo $e_2 = \frac{R_1 + R_2}{2}$, l'altezza totale assunta dopo la distorsione dalla superficie laterale limitante il solido internamente sarebbe

$$h + \frac{\eta}{1 - \eta^2} \frac{\theta}{2\pi} \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} h$$

e l'altezza totale della superficie laterale limitante il solido esternamente sarebbe divenuta

$$h - \frac{\eta}{1 - \eta^2} \frac{\theta}{2\pi} \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} h$$

quindi la differenza d'altezza delle due superficie limiti interna ed esterna sarebbe

$$(15) \quad H = \frac{2\eta}{1 - \eta^2} \frac{\theta}{2\pi} \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} h.$$

mentre la freccia di flessione sarebbe

$$(16) \quad g = \frac{\eta}{1 - \eta^2} \frac{\theta}{2\pi} \cdot \frac{h^2}{4(R_1 + R_2)}.$$

⁽¹⁾ Questo risultato, che ci manca qui lo spazio di sviluppare, può raggiungersi con molta facilità ponendo in equazione il problema mediante le equazioni dell'elasticità trasformate in coordinate cilindriche.

10. Ho fatto l'esperienza con un cilindro cavo di *caoutchouc* delle dimensioni seguenti

$$R_1 = 28^{\text{mm}} \quad , \quad R_2 = 12^{\text{mm}} \quad , \quad h = 28^{\text{mm}}$$

e ho fatto un taglio radiale di $68^{\circ}.30'$.

Dopo la distorsione *si manifestarono tutte le particolarità prevedute dal calcolo*; la differenza d'altezza delle superficie limitanti internamente ed

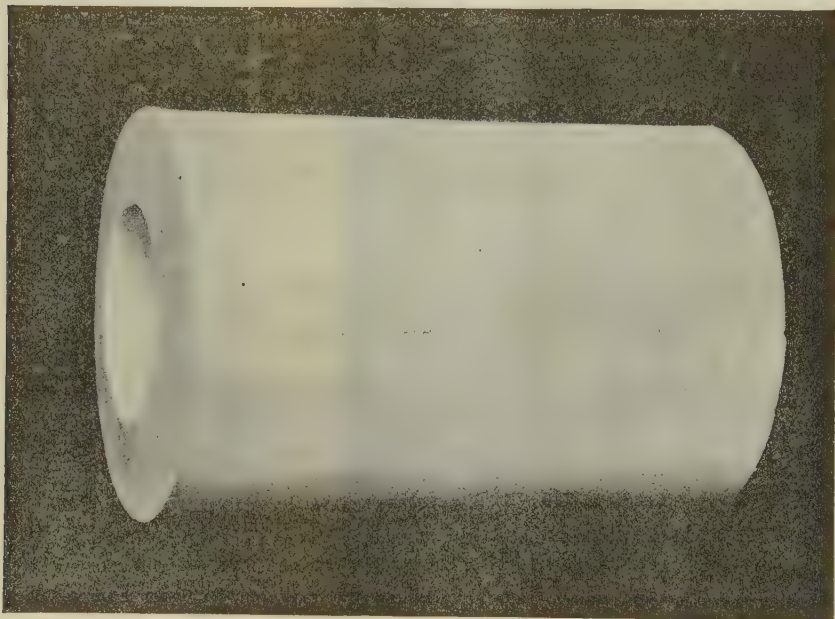


FIG. 7.

esternamente il solido fu misurata e risultò di $2^{\text{mm}},1$ e la freccia di flessione fu pure misurata e risultò di $0^{\text{mm}},35$. Fatto il calcolo mediante le formule (15) e (16) e prendendo $\eta = \frac{1}{2}$ risultò

$$\begin{aligned} H &= \text{differenza d'altezza} = 2^{\text{mm}},6 \\ g &= \text{freccia di flessione} = 0^{\text{mm}},53. \end{aligned}$$

L'accordo quindi fra il calcolo e le misure dirette sono molto soddisfacenti.

L'ing. Jona di Milano ebbe la gentilezza di farmi preparare allo stabilimento Pirelli un cilindro cavo di *caoutchouc* delle dimensioni $R_1 = 5^{\text{cm}}$, $R_2 = 2^{\text{cm}},95$, $h = 13^{\text{cm}}$, a cui fece eseguire un taglio radiale dell'ampiezza angolare di 78° . Siccome la saldatura tendeva ad aprirsi, onde fissare la forma del solido deformato, ne feci fare uno stampo in gesso che è riprodotto fotograficamente nella fig. 7.

Questo solido mostra in modo manifesto tutte le particolarità che il calcolo aveva prevedute, cioè l'allungamento interno, il raccorciamento esterno e la flessione laterale, come lo indica la fig. 8, in cui per rendere evidente il fenomeno fu fatta la fotografia del cilindro a cui venne posto

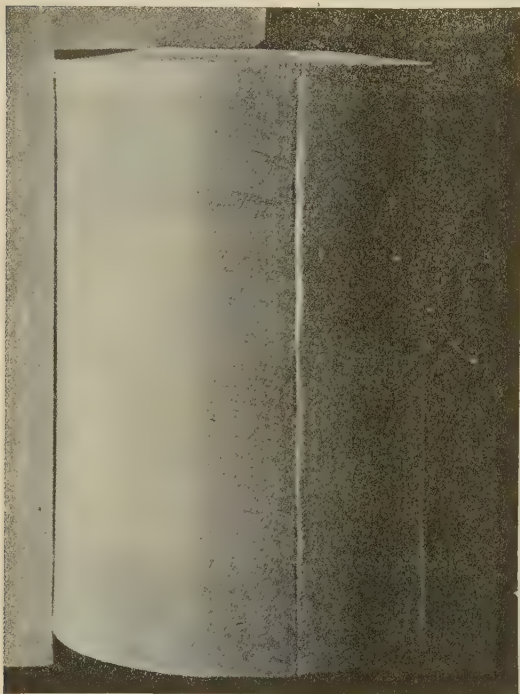


FIG. 8.

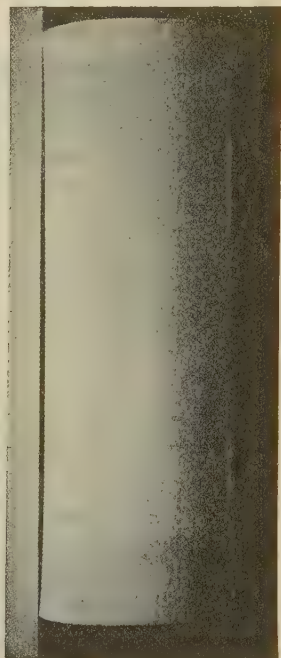


FIG. 9.

accanto a sinistra una squadra. Nelle figure 7 ed 8 si vede benissimo il luogo ove il taglio e la conseguente saldatura furono eseguiti.

La fig. 9 rappresenta la fotografia dello stampo in gesso dell'anima del cilindro. Avendo posto accanto a sinistra un regolo, la curvatura interna risulta chiaramente visibile.

A cagione della grande altezza di questo cilindro per rapporto ai raggi della base le formule (15) e (16) non sono applicabili in questo caso.

Debbo esprimere al prof. Sella ed al dott. Zambiasi dell'Istituto fisico di Roma i più vivi ringraziamenti per le riproduzioni fotografiche e le misure eseguite ed al prof. Pittarelli per i disegni cortesemente fatti.

Matematica. — *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare.* Nota del Corrispondente G. CASTELNUOVO.

10. Riprendiamo ora in esame la superficie irregolare ⁽¹⁾

$$(1) \quad f(x, y, z) = 0,$$

ed un sistema algebrico S_p di curve sopra di essa (n. 2), sistema dotato della proprietà, che una sua curva C generica non è equivalente a nessun'altra curva di S_p . Le curve di S_p si possono rappresentare, come fu già detto, sopra i singoli punti della varietà di Picard a p dimensioni

$$(4) \quad V(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{p+1}) = 0,$$

la quale possiede p integrali semplici, distinti, di prima specie

$$(6) \quad u_1(\xi), u_2(\xi), \dots, u_p(\xi).$$

Se il punto ξ descrive una curva algebrica γ entro V_p , gli integrali (6) divengono integrali abeliani, di prima specie, relativi alla curva γ . Ora ai punti di γ corrispondono sulla superficie f le curve di un sistema algebrico ∞^1 , che indicherò con S_1 . Per ogni punto (x) di f passano certe curve $C_1, C_2, \dots, C_m$ (dove $m \geq 1$) di S_1 , cui corrispondono i punti $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(m)}$ della curva γ . Formiamo la somma

$$(12) \quad u_i(\xi^{(1)}) + u_i(\xi^{(2)}) + \dots + u_i(\xi^{(m)}), \quad (i = 1, 2, \dots, p).$$

Questa, tenuto conto delle relazioni che passano tra le coordinate (x, y, z) del punto (x) di f , e le ξ , si trasforma in un integrale semplice di 1^a specie della superficie (1)

$$I_i = \int A_i(x, y, z) dx + B_i(x, y, z) dy,$$

dove A_i, B_i sono funzioni razionali ⁽²⁾.

Attribuendo ad i i valori $1, 2, \dots, p$, abbiamo così p integrali semplici, di prima specie, della superficie f , integrali i cui periodi sono combinazioni lineari, a coefficienti interi, dei periodi di $u_1, u_2, \dots, u_p$, rispettivamente.

⁽¹⁾ V. le due Note sullo stesso soggetto a pag. 545, 593 di questi Rendiconti.

⁽²⁾ Questo procedimento, applicato a *tutti* gli integrali abeliani di prima specie della curva γ , permette al sig. Humbert (Mem. citata, Journal de Mathématiques 4^e s., t. X) di concludere che una superficie, contenente un sistema come S_1 , possiede *almeno* un integrale semplice di prima specie.

Ora, se le (12) forniscono effettivamente p funzioni di x, y, z , che siano linearmente distinte tra loro, noi otteniamo, col procedimento indicato, un sistema di p integrali semplici, linearmente distinti, della superficie $f=0$, e giungiamo senz'altro al risultato cui tendiamo.

Ma si può sospettare:

- 1) che le somme (12) forniscano tutte delle costanti;
- 2) che qualcuna delle somme (12) sia costante;
- 3) che le p funzioni di x, y, z fornite dalle (12) non siano tutte distinte, ma possano esprimersi linearmente in funzione di q di esse, dove $0 < q < p$.

Premesso che il caso 3) non differisce dal caso 2), come risulta sostituendo agli integrali $u_1(\xi), \dots, u_p(\xi)$, convenienti combinazioni lineari di questi, noi dimostreremo:

- I) che il caso 1) non può presentarsi nelle ipotesi fatte;
- II) che se q delle somme (12) forniscono delle funzioni di x, y, z , e le altre $p - q$ danno delle costanti, la varietà di Picard V_p possiede due sistemi algebrici di imprimitività V_q e V_{p-q} , tenendo conto dei quali si ritrovano di nuovo i p integrali della f .

11. Dimostriamo anzitutto, per assurdo, che il caso 1) non può presentarsi. Si supponga, se è possibile, che, variando il punto (x) sulla superficie f , variando quindi le curve $C_1, C_2, \dots, C_m$ del sistema S_1 che escono da esso (alle quali curve corrispondono i punti $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(m)}$ di γ), le somme (12) rimangano tutte costanti. Ciò significa che il gruppo $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(m)}$ varia entro una involuzione g_m^{m-1} della V_p (n. 6); quindi, sopra f , la curva somma $C_1 + C_2 + \dots + C_m$ varia entro ad un sistema lineare. Il sistema algebrico di curve S_1 sopra f sarebbe dunque tale, che la somma delle m curve di S_1 , uscenti da un punto di f , varierebbe entro ad un sistema lineare al variare di questo punto.

Ma un sistema S_1 di curve, il quale goda questa proprietà, è, per un teorema del sig. Severi ⁽¹⁾, contenuto totalmente entro un sistema lineare.

(¹) Il teorema in questione si enuncia così: *Se sopra una superficie f si ha un sistema algebrico (irriducibile) ∞^1, S_1 , di curve, tale che la curva composta delle m curve di S_1 , che escono da un punto di f , vari entro un sistema lineare al variare del punto, il sistema S_1 stesso è contenuto totalmente entro ad un sistema lineare.* Il teorema si deduce in modo semplice da un lemma notevolissimo sulle curve algebriche, che il Severi ha enunciato in una sua Nota dei Comptes Rendus de l'Acad. d. Sciences, 3° aprile 1905: « se in una curva algebrica si ha una serie Σ algebrica, irriducibile, ∞^1 , di gruppi di punti, tale che il gruppo composto degli m gruppi di Σ contenenti un punto della curva vari in una serie lineare al variare del punto, allora tutti i gruppi di Σ appartengono ad una serie lineare ». Le dimostrazioni del lemma e del teorema si troveranno nella Memoria del sig. Severi: *Il teorema di Abel sulle superficie algebriche*, che verrà presto pubblicata negli Annali di Matematica.

Nella redazione preliminare di questo mio lavoro, che ha dato luogo alla Nota dei

E ciò contraddice alla ipotesi fatta, secondo la quale le curve di S_1 non sono equivalenti a due a due.

12. Non possiamo invece escludere la ipotesi 2) (n. 10), la quale si verifica quando, delle p somme (12), alcune, q ($0 < q < p$), forniscono funzioni linearmente distinte di x, y, z , mentre le rimanenti $p - q$ danno delle costanti. Dobbiamo dunque esaminare quale particolarità si presenti, se

$$(13) \quad u_i(\xi^{(1)}) + \dots + u_i(\xi^{(m)}) \equiv \begin{cases} I_i(x, y, z) & (i = 1, 2, \dots, q), \\ k_i & (i = q + 1, \dots, p), \end{cases}$$

dove le k_i sono costanti. A tal fine fissiamo nella varietà di Picard V_p una qualsiasi involuzione g_{m+1}^m , ad es. quella rappresentata dalle congruenze

$$(14) \quad u_i(\xi) + u_i(\xi^{(1)}) + \dots + u_i(\xi^{(m)}) \equiv 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p).$$

In virtù di questa g_{m+1}^m , ad ogni punto (x) di f , e quindi ad ognuno degli ∞^2 gruppi di m punti della curva γ che compariscono nelle (13), viene a corrispondere un unico punto (ξ) della varietà V_p , punto tale che

$$(15) \quad u_i(\xi) \equiv \begin{cases} -I_i(x, y, z) & (i = 1, 2, \dots, q), \\ -k_i & (i = q + 1, q + 2, \dots, p). \end{cases}$$

Otteniamo così ∞^2 punti (ξ) di V_p , od, in casi particolari, ∞^1 , il cui luogo F (superficie o curva) è in corrispondenza *razionale* colla superficie data f ; precisamente ad ogni punto (x) di f corrisponde *un* punto (ξ) di F , mentre ad ogni punto di F corrisponde su f , o un numero finito di punti, o gli ∞^1 punti di una curva algebrica (variabile in un fascio irrazionale). In ogni caso i q integrali $u_i(\xi)$ (dove $i = 1, 2, \dots, q$) di F forniscono q integrali distinti — $I_i(x, y, z)$ di f .

Ora l'ente algebrico F contenuto nella varietà di Picard V_p è tale, che i p integrali di V_p forniscono solo $q < p$ integrali distinti di F , come ap-

Comptes Rendus (23 genn. 1905), io mi appoggiavo, per superare la difficoltà posta ora in luce, sopra considerazioni di *Analysis situs*, concernenti il confronto dei cicli lineari relativi alla superficie f ed alla varietà V_p . Nel preparare questa redazione definitiva mi sono accorto che quelle considerazioni potevano prestarsi a qualche obbiezione, per superarla quale si andava incontro a serie complicazioni. Intanto il signor Severi, imbattutosi in difficoltà analoghe, era riuscito a vincerle mediante il lemma ed il teorema sopra enunciati. Grato dell'autorizzazione che il sig. Severi mi accorda, approfittando anch'io di quelle proprietà veramente notevoli.

Aggiungo che la difficoltà nominata si supererebbe pure, nel mio caso, ove si dimostrasse, valendosi della rappresentazione parametrica (7) della V_p , il seguente teorema relativo a quella varietà: « Si abbia, entro V_p , un sistema algebrico di varietà W , a $p - 1$ dimensioni, e si considerino le intersezioni $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(m)}$ di una W con una curva algebrica generica γ di V_p . Se le p somme (12) non variano, al variare della W , il sistema descritto dalla W è contenuto totalmente in un sistema lineare ».

pare dalle (15). Ci troviamo dunque nel caso previsto dal teorema del n. 9. Concludiamo che, nelle ipotesi attuali, la varietà di Picard V_p contiene un sistema ∞^{p-q} di varietà algebriche V_q , sopra le quali il gruppo G_p opera imprimitivamente; ciascuna V_q è mutata in sè stessa dalle trasformazioni di un sottogruppo algebrico G_q di G_p . Una di queste V_q , luogo di punti (ξ) soddisfacenti alle congruenze

$$u_i(\xi) \equiv -k_i \quad (i = q+1, q+2, \dots, p),$$

contiene entro a sè l'ente algebrico F .

Viceversa, se la varietà di Picard V_p gode la particolarità ora enunciata, certo potrà presentarsi il caso che stiamo esaminando. Basta a tal fine scegliere la curva γ entro una delle V_q , giacchè allora per tutti i punti di γ gli integrali $u_{q+1}, u_{q+2}, \dots, u_p$ conservano valori costanti, sicchè si troveranno verificate relazioni del tipo (13). Noi otteniamo dunque soltanto q integrali $I_1, I_2, \dots, I_q$ della nostra superficie f ; ma ciò dipende dal fatto, che la scelta particolare della curva γ entro V_p ci permette di usufruire soltanto di q tra i p integrali che V_p possiede.

È facile ora vedere come si otterranno i $p-q$ integrali della superficie f , che non si sono presentati sinora. Basta ricordare che, nel caso attuale, la varietà V_p , contenendo $\infty^{p-q} V_q$ trasformate in sè da un gruppo G_q , contiene, in conseguenza, $\infty^q V_{p-q}$ trasformate in sè da un gruppo G_{p-q} (n. 9).

Fissiamo entro una di queste V_{p-q} una curva algebrica γ' generica, ed applichiamo ad essa il procedimento che poc'anzi si è applicato a γ . Otterremo così, mediante gli integrali $u_{q+1}(\xi), \dots, u_p(\xi)$ di V_p , certi $p-q$ integrali $I_{q+1}(x, y, z), \dots, I_p(x, y, z)$ di f , che saranno linearmente distinti tra loro e dai precedenti. E riusciremo in tal modo a completare il numero totale p degli integrali semplici, distinti, di prima specie, che appartengono alla superficie f .

Risulta poi chiaro che l'aver trovato separatamente due gruppi, uno di q , l'altro di $p-q$ integrali, dipende dalla scelta particolare della curva composta $\gamma + \gamma'$ che si è adoperata. Se, dopo aver reso connessa una tal curva col far passare γ e γ' per uno stesso punto comune a V_q e a V_{p-q} , si fa variare con continuità la curva $\gamma + \gamma'$, in modo che essa diventi irriducibile, restando algebrica, si perverrà ad una curva Γ , la quale, collo stesso procedimento applicato prima a γ e γ' , fornirà insieme p integrali distinti di f .

Concludiamo quindi che, qualunque particolarità presenti la varietà di Picard V_p , sempre la superficie f possiede p integrali semplici, distinti, di prima specie. Che ogni altro integrale semplice, di prima specie, possa esprimersi linearmente mediante quelli, sarà dimostrato tra poco.

13. Fra i varî modi che permettono di fissare un sistema di p integrali semplici, distinti, della superficie f , giova notare il seguente, che è fondato sulle considerazioni dell'ultimo numero.

Ricordiamo che, valendoci di una curva algebrica γ situata in V_p , noi siamo riusciti a costruire, entro V_p , una superficie (eventualmente curva) algebrica F , la quale è in corrispondenza razionale colla superficie data f ; precisamente ad ogni punto (x) di f corrisponde *un* punto (ξ) di F . I p integrali semplici, distinti, di prima specie di V_p , che abbiamo indicato con $u_i(\xi)$, ci forniscono p integrali di F , che sono distinti, se la V_p non possiede divisioni algebriche di imprimitività (n. 8). In questa ipotesi, noi possiamo assumere, come valori di p integrali distinti I_i di f nel punto (x) , i valori che hanno gli integrali $u_i(\xi)$ nel punto corrispondente ξ di f . Possiamo dunque porre

$$I_i(x, y, z) \equiv u_i(\xi), \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

le congruenze avendo per moduli i periodi di u_i . Otteniamo così p integrali di f , i cui periodi sono combinazioni lineari, a coefficienti interi, dei periodi degli integrali u_i di V_p . Che anche i primi periodi, per ciascun integrale, siano esattamente in numero di $2p$, risulterà dalle considerazioni del numero seguente.

Se invece la V_p ammette due sistemi algebrici di imprimitività, composti rispettivamente di V_q e di V_{p-q} , allora, col mezzo di una curva γ tracciata in una V_q , e di una γ' tracciata in una V_{p-q} , noi possiamo costruire due superficie (eventualmente curve) F, F' , la prima delle quali sarà contenuta in una V_q , l'altra in una V_{p-q} . Ad ogni punto (x) di f corrisponde *un* punto (ξ) di F ed *un* punto (ξ') di F' . Ora la V_q possiede q integrali semplici, distinti, di prima specie, ad es. $u_1(\xi), u_2(\xi), \dots, u_q(\xi)$, con $2q$ periodi, i quali integrali, mentre il punto (ξ) varia su F , ci forniscono q integrali di F . Similmente la V_{p-q} possiede $p - q$ integrali distinti, con $2(p - q)$ periodi, che possiamo indicare con $u_{q+1}(\xi'), u_{q+2}(\xi'), \dots, u_p(\xi')$, e che forniscono $p - q$ integrali di F' . Convenendo che al punto (x, y, z) di f corrispondano i punti $(\xi), (\xi')$ di F, F' rispettivamente, poniamo

$$I_i(x, y, z) \equiv \begin{cases} u_i(\xi) & (i = 1, 2, \dots, q), \\ u_i(\xi') & (i = q + 1, \dots, p). \end{cases}$$

Avremo così, in tutto, p integrali di f , che si distribuiscono in due classi, composte di q e $p - q$ integrali, rispettivamente; i primi integrali sono *riducibili* a q integrali dotati di $2q$ sistemi di periodi simultanei, ed i secondi integrali sono *riducibili* a $p - q$ integrali con $2(p - q)$ sistemi di periodi.

14. Le considerazioni precedenti, le quali provano che una superficie f , avente l'irregolarità p , possiede p integrali semplici, distinti, di prima specie, lasciano il dubbio che la superficie possa ammettere altri integrali analoghi, distinti da quelli. Un tal dubbio però vien rimosso, ricorrendo, ad es., al

ragionamento che il sig. Severi ha esposto nella sua Nota *Sulla differenza tra i numeri degli integrali*.... (1). Eccone il concetto. Si abbia un integrale di prima specie di f , i cui periodi (ove si mettano in evidenza le parti reali ed immaginarie) siano $\alpha_1 + i\beta_1, \alpha_2 + i\beta_2, \dots$. Si può allora, in virtù di un teorema del sig. Picard, formare due integrali semplici di seconda specie di f , il primo dei quali abbia i periodi $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, ed il secondo i periodi $\beta_1, \beta_2, \dots$. Se dunque la superficie possiede $p' \geq p$ integrali semplici di prima specie, si otterranno, nel modo detto, $2p'$ integrali di seconda specie, dei quali si può affermare che sono distinti tra loro. D'altra parte la differenza tra i numeri degli integrali distinti di seconda e di prima specie, differenza che, in virtù delle cose dette, è maggiore od uguale a p' , si sa esser uguale a p (2). Segue $p' = p$; e segue ancora che il numero degli integrali distinti di seconda specie è esattamente $2p$. Altrettanti sono dunque i cicli lineari che possiede la superficie, riguardata come una varietà reale di Riemann a quattro dimensioni (3).

Raccogliendo tutti i principali risultati ottenuti sin qui, perveniamo al teorema fondamentale seguente:

Una superficie algebrica, avente i generi p_g, p_a e quindi l'irregolarità $p = p_g - p_a$, possiede esattamente p integrali semplici, distinti, di prima specie, e $2p$ integrali semplici, distinti, di seconda specie. La varietà reale a quattro dimensioni, che rappresenta la superficie nel senso di Riemann, ammette $2p$ cicli lineari distinti, ed ha la connessione lineare $p_1 = 2p + 1$. Gli integrali nominati hanno dunque $2p$ sistemi di periodi simultanei.

Risulta qui evidente la perfetta analogia di questo risultato coi noti teoremi di Riemann, relativi agli integrali abeliani di prima e seconda specie annessi ad una curva di genere p . Quando si ponga mente alla connessione lineare, l'irregolarità di una superficie ha un ufficio analogo al genere di una curva; e le superficie regolari sono paragonabili alle curve razionali.

L'analogia si estende anche al caso di riducibilità degli integrali. Se, tra i p integrali di prima specie di una superficie, esistono $q < p$ integrali distinti, riducibili a q integrali con $2q$ periodi, esisteranno pure altri $p - q$ integrali, distinti tra loro e da quelli, che saranno riducibili ad un sistema di $p - q$ integrali con $2(p - q)$ periodi. Nel tempo stesso la varietà di Picard V_p annessa alla superficie presenta le particolarità algebriche menzionate al n. 9. Ciò risulta facilmente dalle cose dette; ma è pur contenuto

(1) Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, 22 genn. 1905.

(2) Teorema dei sigg. Picard e Severi; si vedano i Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences del 16 gennaio 1905, e la Nota sopra citata del sig. Severi.

(3) Cfr. la *Théorie des fonctions algébriques de deux variables* dei sigg. Picard e Simart, t. I, pag. 150.

nella teoria più volte citata della riducibilità degli integrali abeliani, la quale si estende immediatamente agli integrali sopra considerati.

15. Gli ultimi risultati, e le considerazioni con cui furono ottenuti, trovano immediata applicazione alle superficie aventi l'irregolarità 1 o 2.

Segue, ad es., dal n. 13 che una superficie f avente l'irregolarità 1 può rappresentarsi razionalmente sopra una varietà di Picard ad 1 dimensione, cioè sopra una curva ellittica V_1 . Ad ogni punto di V_1 corrisponde su f una curva algebrica; le ∞^1 curve algebriche, che così si ottengono, formano un fascio ellittico. Le curve qui nominate potrebbero, a dir vero, spezzarsi in più curve di un nuovo fascio irrazionale, ma il genere π di questo fascio non può superare 1, giacchè altrimenti la superficie possederebbe almeno π integrali semplici e distinti, di prima specie, il che non è possibile se $p = 1$. Dunque: *una superficie di irregolarità 1 possiede un fascio ellittico di curve algebriche* ⁽¹⁾. Lo stesso teorema vale se la superficie f , pur avendo l'irregolarità $p > 1$, possiede un integrale di prima specie riducibile ad ellittico, giacchè allora la varietà di Picard V_p ha un sistema di imprimitività composto di ∞^{p-1} curve ellittiche V_1 ; sopra una di queste si potrà dunque rappresentare razionalmente la f . Occorre però avvertire che, nel caso presente, la curva generica del fascio ellittico può scindersi in più curve di un fascio di genere π , tale che $1 \leq \pi \leq p$.

Consideriamo ora una superficie f di irregolarità $p = 2$. La varietà di Picard V_2 è in tal caso una superficie iperellittica. La f potrà dunque rappresentarsi razionalmente sopra una superficie iperellittica (cioè birazionalmente sopra la detta superficie contata una o più volte), oppure sopra una curva di genere $\pi \leq 2$ della superficie iperellittica. Ricordando che l'ipotesi $\pi = 1$ porta la presenza di due fasci ellittici di curve ellittiche sulla V_2 , si giunge al teorema:

Una superficie avente l'irregolarità 2 è birazionalmente identica ad una superficie iperellittica semplice o multipla: oppure la superficie primitiva contiene un fascio di genere 2 di curve, o due fasci ellittici di curve.

16. Ritorniamo al teorema fondamentale di questa Nota (n. 14), ed all'analogia rilevata tra le superficie aventi l'irregolarità p e le curve di genere p . Il procedimento da noi seguito mette in luce la ragione intima di questa analogia. Infatti tutte le considerazioni svolte nella Nota I (n. 1 — 4) sugli ∞^p sistemi lineari, regolari, di curve contenuti in uno stesso sistema algebrico, sopra una superficie di irregolarità p , si trasportano senz'altro alle ∞^p serie lineari non speciali g_n^{n-p} , di ordine dato $n \geq p$, esistenti sopra una curva C di genere p . Anche queste serie possono rappresentarsi sopra

(¹) Cfr. Severi, Osservazioni sui sistemi continui di curve....., Atti dell'Acc. delle Scienze di Torino, 28 febbraio 1904.

i punti di una varietà algebrica V_p , a p dimensioni, la quale ammette un gruppo G_p di trasformazioni birazionali in sè, permutabili a due a due. E la V_p non dipende dall'ordine n da cui si parte, purchè sia $n \geq p$; sicchè la V_p può riguardarsi come rappresentante gli ∞^p gruppi di p punti di una curva C di genere p ⁽¹⁾. Il legame tra gli integrali abeliani di C e gli integrali semplici di V_p si potrebbe stabilire in modo perfettamente analogo a quello da noi tenuto per dedurre gli integrali della superficie f dagli integrali di V_p ; sebbene, nel caso delle curve, si possa procedere in modo più semplice. Ma dove la considerazione della V_p , relativa ad una curva C , sembra riuscir vantaggiosa, è nello studio dei casi di riducibilità degli integrali abeliani di C ; allora infatti la varietà V_p possiede due sistemi algebrici di imprimitività ($\infty^{p-q} V_q$ ed $\infty^q V_{p-q}$), ed in corrispondenza il gruppo G_p ammette due sottogruppi algebrici G_q, G_{p-q} .

Non voglio però fermarmi qui sopra tale soggetto. Accennerò piuttosto ad un'altra questione, che si presenta naturalmente, quando si cerchi il numero dei *moduli* (invarianti per trasformazioni birazionali), da cui dipende la V_p relativa ad una curva o superficie assegnata. Ricordo a tal fine che una varietà *generale* V_p , dotata di un gruppo G_p di trasformazioni birazionali in sè, dipende da $\frac{p(p+1)}{2}$ moduli, come risulta dalla teoria delle

funzioni $2p$ volte periodiche di p variabili, funzioni che, come dicemmo, forniscono una rappresentazione parametrica della V_p . Risulta d'altra parte dalle ricerche di Riemann che, se la V_p rappresenta i gruppi di p punti di una curva di genere p , essa ha un grado di generalità inferiore, perchè quella curva e la relativa V_p dipendono da $3p - 3$ moduli ($p > 1$), numero inferiore al precedente, se $p > 3$. Si poteva sospettare che una riduzione analoga nel numero dei moduli avvenisse per una V_p legata con una superficie di irregolarità p .

Ebbene, ciò non è. Infatti da considerazioni del sig. Enriques e mie, che saranno pubblicate in seguito, risulta che le varietà di Picard, relative alle superficie di irregolarità p , dipendono proprio da $\frac{p(p+1)}{2}$ moduli. In termini più esatti: « determinata una V_p coll'esprimere che le coordinate $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{p+1}$ di un suo punto generico sono funzioni abeliane *generali*, cogli stessi periodi, di p variabili, esistono infinite superficie, di irregolarità p , che hanno la V_p come varietà di Picard ». Od anche: « fissato un sistema di $2p^2$ quantità $a_{ik} (i = 1, 2, \dots, p; k = 1, 2, \dots, 2p)$, che possano esser prese come periodi di una funzione abeliana generale di p va-

⁽¹⁾ Il gruppo G_p delle trasformazioni in sè della V_p relativa ad una curva trovasi già studiato, per via elementare (algebrica), in una mia Nota, *Le corrispondenze univoche tra i gruppi di p punti...*, inserita nei Rendic. del R. Istit. Lomb. dell'anno 1893.

riabili, esistono infinite superficie di irregolarità p , i cui p integrali semplici, distinti, di prima specie, I_i , hanno i periodi $a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,2p}$ ».

Si ricordi però che due superficie f, f' , aventi la stessa varietà di Picard, non sono generalmente in corrispondenza birazionale tra loro. Sta solo il fatto che ogni sistema algebrico di curve di f è birazionalmente identico ad un sistema algebrico di curve di f' .

Matematica. — *La classificazione delle superficie di 5° ordine con quintica doppia.* Nota del Corrispondente ERNESTO PASCAL.

Delle superficie S_5 di 5° ordine con quintica doppia si occuparono ⁽¹⁾ Clebsch, Cremona, Sturm, Caporali e Del Re, ma nessuno di questi Autori ha fatta la classificazione delle varie specie di superficie dal punto di vista della realtà o immaginarietà di alcune delle 10 rette che essa contiene, mentre un'analoga classificazione è stata fatta per le superficie di 3° ordine (Schlaefli, Sturm, Cremona) ⁽²⁾ e per le superficie di 4° ordine a conica doppia (Zeuthen, Segre) ⁽³⁾, le quali, come si sa, hanno colle superficie di cui parliamo un intimo legame in rapporto alle rette che esse contengono; e il legame è che, come la configurazione delle rette della superficie di 4° ordine a conica doppia è la stessa di quella delle 16 rette restanti fra le 27 rette di una superficie di 3° ordine, quando di queste se ne sopprima una e le 10 che la incontrano, così la configurazione delle 10 rette della superficie di 5° ordine a quintica doppia è la stessa di quella delle restanti fra le 16 della precedente, quando di queste se ne sopprima una e le cinque che la incontrano. Il metodo che io adopero per ottenere, in modo semplicissimo e immediato, la classificazione delle S_5 , non è fondato su principî geometrici nè su uno studio geometrico delle S_5 medesime, ma è invece un metodo puramente *combinatorio*, fondato sullo studio della configurazione delle rette, e su di una loro rappresentazione. Esso è lo stesso di quello che ho già adoperato per la sestica storta, e per la superficie di Kummer in altri due lavori recenti ⁽⁴⁾, e che può anche adoperarsi per le superficie di 3° ordine, e per quelle di 4° ordine a conica doppia, per ottenere i risultati medesimi che sono stati ottenuti per via geometrica da altri; così il nostro metodo combinatorio in tutti questi casi ha il conforto del controllo.

⁽¹⁾ Per le indicazioni bibliografiche rimando al cap. XIII, § 1 del II volume del mio *Repertorio di Matem. superiori* (ediz. italiana, Milano 1900, pag. 497; edizione tedesca, Leipzig 1902, pag. 349).

⁽²⁾ Ibid., cap. XI, § 4.

⁽³⁾ Ibid., cap. XII, § 6.

⁽⁴⁾ Pascal, *Le varie forme delle curve storte di 6° ordine ecc.*, Rend. Ist. Lomb. 2), t. 38, 1905, pag. 579; *Sulla classificazione delle superficie di Kummer*, ibid., pag. 688.

Prima di passare pertanto alla S_5 , diciamo qualcosa delle altre due superficie qui ricordate.

1. Non ripeteremo le varie considerazioni già fatte nelle due Note succitate, in riguardo al nostro *metodo combinatorio*, e per brevità rimanderemo il lettore a quelle Note, entrando senz'altro nell'applicazione del metodo. Le 27 rette della superficie cubica possono essere rappresentate simbolicamente dalle congiungenti a due a due 8 punti fondamentali 1, 2, ... 8, quando di queste congiungenti se ne sopprima una, p. es. la (12); *in tale rappresentazione due congiungenti sono da considerarsi rappresentanti due rette che si incontrano o no secondochè esse colla congiungente fissa (12) formano una cosiddetta terna dispari o una terna pari* ⁽¹⁾, ricordando che *terna pari* è un assieme di tre rette rappresentative formanti figure dei seguenti tre tipi

$$\left. \begin{array}{l} (12) (23) (31) \\ (12) (13) (14) \\ (12) (13) (45) \end{array} \right\} \text{ (terne pari)}$$

e *terna dispari* è un assieme di tre rette rappresentative formanti invece figure dei seguenti due altri tipi:

$$\left. \begin{array}{l} (12) (23) (34) \\ (12) (34) (56) \end{array} \right\} \text{ (terne dispari)}.$$

Un piano tritangente è rappresentato da tre rette che, insieme colla retta fissa (12), formano una quaterna di cui tutte le terne sono dispari, (nei miei lavori precedenti una tale quaterna è chiamata una quaterna-zero).

Supponiamo ora che alcuni degli otto punti fondamentali diventino immaginari a due a due coniugati, e propriamente, secondo i principî sviluppati nelle mie Note già citate, in modo che di ognuna delle 27 rette che diventi immaginaria vi sia sempre un'altra da considerarsi come coniugata, perchè congiunge punti coniugati di quelli congiunti dalla prima. Otteniamo allora, come ora mostreremo brevemente, tutta la nota classificazione di Schläefli.

Supposti immaginari coniugati i due punti 1 e 2, le 15 congiungenti gli altri sei punti sono reali, e sono immaginarie le 12 congiungenti (formanti una bisestupla di Schläefli) ⁽²⁾ i punti (1) o (2) cogli altri.

Si hanno quindi 15 rette reali e 12 immaginarie formanti una bisestupla di Schläefli.

(1) Vedi la mia Memoria: *Rappresentazione geometrica delle caratteristiche ecc.*, Annali di Matematica (2), t. XX, 1892, § 27.

(2) Vedi il § 6 della mia Memoria: *Continuazione del saggio sul gruppo delle sostituzioni fra le rette della superficie cubica*, Annali di Matematica (2), t. XXI, 1893, pp. 85-137

Le 12 immaginarie sono a due a due coniugate ma non concorrenti, quindi senza punto reale; p. es. sono coniugate (31) e (23), ma queste con (12) formano una terna pari. Dei 45 piani tritangenti ve ne sono 15 reali, perchè altrettante sono le quaterne-zero reali contenenti la retta (12), e gli altri sono immaginari perchè tutti del tipo (23) (34) (41) contenenti cioè una retta reale e due immaginarie non coniugate.

Per ogni retta reale (come p. es. (34)) passano tre dei piani reali (p. es. (34) (56) (78) , (34) (57) (68) , (34) (58) (67)).

Questa varietà di superficie è precisamente la seconda di quelle contenute nella classificazione di Schlaefli (la prima è naturalmente quella con tutte le rette reali) e alla medesima varietà si giungerebbe se si supponessero immaginari coniugati i punti (3), (4).

Supposti ora immaginari coniugati i punti (1), (2) e (3), (4) si hanno sette rette reali, cioè la (34) e le congiungenti i punti (5), (6), (7), (8); quattro rette immaginarie ma con un punto reale ⁽¹⁾ (le (13), (24), (14), (23)) e le rimanenti 16 immaginarie senza punto reale. Di piani reali se ne ha cinque di due specie, cioè i tre piani (34) (56) (78) , (34) (57) (68), (34) (58) (67), passanti ciascuno per tre rette reali, e i due piani (34) (13) (24), (34) (14) (23), passanti per una retta reale e due immaginarie coniugate con un punto reale; i cinque piani passano per una medesima retta. Questa è la terza varietà di Schlaefli e alla stessa si giunge supposti immaginari coniugati i punti (3), (4) e (5), (6).

Alla quarta varietà si giunge supponendo coniugati i punti (1), (2); (3), (4); (5), (6). Si hanno allora le tre rette reali (34), (56), (78) situate in un piano tritangente (reale); le rimanenti rette sono tutte immaginarie, ma di esse 12 hanno sempre un punto reale (come (13), (24), ...) e le altre no (come (37), (38), ...). Queste ultime 12 formano una bisestupla di Schlaefli.

I piani reali sono $1 + 6 = 7$; uno è il piano delle tre rette reali, e gli altri sono piani con una retta reale e due immaginarie coniugate con un punto reale (p. es. (13) (34) (42)); per ogni retta reale passano due altri piani reali, oltre quello delle tre rette (così per (34) passano anche i piani (34) (13) (42) , (34) (14) (23)).

E finalmente la quinta varietà di Schlaefli si ottiene facendo diventare immaginarie coniugate le coppie di punti (1), (2) ; (3), (4) ; (5), (6) ; (7), (8). Si hanno allora le tre rette reali (34), (56), (78); le altre 24 rette sono tutte immaginarie ma con un punto reale; vi sono 12 piani reali, di cui uno con tre rette reali, e gli altri 12 con una retta reale e due

(1) Le *punktirte* dei tedeschi. Alcuni (come p. es. Zeuthen, Annali di Matem. (2). t. XIV, 1879) chiamano *rette di 1^a specie* le rette immaginarie con un punto reale, e di *2^a specie* le immaginarie senza punto reale.

immaginarie coniugate. Per ciascuna delle tre rette reali passano in tutto 5 piani reali.

Se ora supponiamo due degli otto punti coincidenti, p. es. i punti (1), (2), e poi facciamo tutte le possibili ipotesi sulla immaginarietà degli altri, otteniamo, come può facilmente vedersi, tutte le già note quattro varietà di superficie cubiche con un punto doppio; similmente si potrebbero ottenere le 6 varietà di superficie con due punti doppi, tre coi punti doppi reali, e tre coi medesimi immaginari coniugati, e così di seguito, potrebbe p. es. così ottenersi in poche righe tutta intera la classificazione contenuta nell'opera di R. Sturm ⁽¹⁾. A noi però basti questo cenno di applicazione del metodo combinatorio, e passeremo a trattare similmente, in un breve cenno, delle superficie di 4° ordine a conica doppia.

2. Delle 27 rette precedenti sopprimane una, p. es. la (34), e le 10 che la incontrano, cioè le (56), (78), (57), (68), (58), (67), (13), (24), (14), (23), le rimanenti rappresentino le 16 rette di una superficie di 4° ordine a conica doppia; le quali restano così rappresentate dalle 16 congiungenti i quattro punti (1), (2), (3), (4) cogli altri quattro. Se invece facciamo che la retta soppressa sia la (23) e le 10 altre che incontrano questa, le 16 rette della superficie sono rappresentate dalle 15 congiungenti a due due i punti (2), (4), (5), (6), (7), (8), e dalla retta (13).

Le due figure rappresentative delle 16 rette, così ottenute, sono le medesime due che nel lavoro già citato di sopra sulle superficie di Kummer servono a rappresentare i 16 piani singolari di questa superficie, e da cui abbiamo dedotto le ordinarie notazioni adoperate dai geometri per tali piani. Onde: *per le 16 rette della superficie di 4° ordine a conica doppia possono adoperarsi le medesime due notazioni che si adoperano per i 16 piani singolari della superficie di Kummer.*

Uno dei 40 piani tritangenti della superficie è rappresentato da una coppia di rette (scelte fra le 16) che, insieme ad una delle due rette principali sopprese nella figura totale delle 28 rette, forma una terna dispari, e ciascuno dei noti cinque coni di Kummer può essere rappresentato da ciascuna delle cinque quaterne-zero che si possono formare colle due rette principali sopprese e colle cinque altre coppie formate dalle 10 altre rette anche sopprese ⁽²⁾.

Così nella prima delle due rappresentazioni i piani sono rappresentati dalle coppie

$$(15) (26), (15) (27), (15) (53), \dots$$

⁽¹⁾ R. Sturm, *Synthetic Untersuchungen über Flächen 3ter Ordnung*, Leipzig, 1867, cap. VII, da pag. 281 a pag. 348.

⁽²⁾ Ciò dipende dalla nota corrispondenza esistente fra i cinque coni di Kummer della superficie di 4° ordine e i cinque piani soppressi relativi alla superficie cubica.

e i coni di Kummer sono rappresentati dalle quaterne formate con (12), (34) e ciascuna delle coppie

(56), (78) ; (57), (68) ; (58), (67) ; (13), (24) ; (14), (23).

Se ora facciamo le solite ipotesi sulla immaginarieta dei punti rappresentativi, abbiamo la nota classificazione delle superficie in 6 varietà ⁽¹⁾; poniamo reali tutti i punti e abbiamo tutte le 16 rette reali; poniamo immaginari coniugati (1), (2) e abbiamo la varietà con 8 rette reali e 8 immaginarie senza punto reali; poniamo immaginarie coniugate le due coppie (1), (2) e (5), (6) e abbiamo la varietà con 4 rette reali, 4 immaginarie con punto reale e le rimanenti immaginarie senza punto reale; e se invece poniamo immaginarie coniugate le due coppie (1), (2) ; (3), (4) abbiamo tutte le 16 rette immaginarie senza punto reale. Col supporre immaginarie le tre coppie (1), (2) ; (3), (4) ; (5), (6) abbiamo la varietà con 8 rette immaginarie a punto reale e 8 immaginarie senza punto reale, e finalmente coll'ipotesi dell'immaginarieta di tutte le quattro coppie (1), (2) ; (3), (4) ; (5), (6) ; (7), (8) si hanno tutte le 16 rette immaginarie con punto reale.

Si potrebbe ora cogli stessi principî esaminare caso per caso la realità dei coni, quella dei piani, e indi esaminare anche i casi in cui alcuni dei punti rappresentativi coincidano, casi che corrispondono a quelli in cui la superficie ha punti doppî; p. es. se supponiamo coincidenti i punti (1), (2) si hanno 4 rette doppie e 8 semplici, e questo è il caso della superficie con un punto doppio (è la specie [2111] di Segre, cit., pag. 361), e di queste possono poi nel solito modo distinguersi tutte le varietà.

Ma questo rapido cenno ci pare che basti per mostrare in che facile modo può come compendiarsi tutta la classificazione; passiamo pertanto a fare lo stesso per la superficie di 5° ordine a quintica doppia.

3. Il sopprimere una delle 16 rette precedenti e le cinque che la incontrano corrisponde a sopprimere, nella figura primitiva di tutte le (28) congiungenti, tre rette formanti una terna pari, e tutte quelle che con due di queste formino una terna dispari. Le 10 rette restanti rappresentano quelle della S_5 .

Poichè una terna pari può presentare tre figure diverse (vedi sopra), così si avrebbero tre rappresentazioni le quali però, come si vede, si riducono subito a due.

Ed infatti se la terna pari soppressa è costituita da tre rette formanti un triangolo (67), (78), (86), le 10 rette restano rappresentate dalle congiungenti i primi cinque punti a due a due, e un'analoga rappresentazione si ottiene se la terna pari di rette è quella costituita da tre rette passanti per un punto (formanti un fascio), p. es. (56), (57), (58).

(1) Zeuthen, Ann. di Math. (2), t. XIV; Segre, Math. Ann., t. XXIV.

Se invece la terna pari è quella delle rette (45), (67), (68), *le 10 rette sono rappresentate dalle congiungenti ciascuno dei punti (1), (2), (3) coi punti (4), (5), (6), e dalla retta isolata (78).*

Due rette che s'incontrano sono sempre rappresentate da due congiungenti formanti una terna dispari con ciascuna delle tre sopresse (¹); perciò nella prima rappresentazione, in cui la terna pari soppressa è quella delle tre rette formanti un triangolo, due rette che si incontrano sono rappresentate da una coppia di rette non aventi alcun punto comune (fra i cinque fondamentali); nella seconda rappresentazione due rette che si incontrano sono rappresentate da coppie di *due* specie, cioè come

$$(15)(12), \text{ ovvero } (12)(34),$$

se la terna pari soppressa è la (56), (57), (58); e finalmente nella terza rappresentazione le coppie di rette che si incontrano sono rappresentate da coppie di *tre* specie diverse, e cioè:

$$(15), (16) ; (16), (78) ; (14), (25).$$

Di qui ne vengono in modo naturale tre possibili diverse notazioni per le 10 rette della superficie S_5 ; e di queste la seconda è quella stessa che si è presentata finora agli Autori che ne hanno trattato (²), mentre le altre due sono state trascurate pur essendo, la prima di esse, la più semplice di tutte, perchè per essa non c'è che *un tipo solo* di coppie di rette concorrenti.

La notazione adoperata finora è la seguente: si indichino quattro rette, formanti un assieme gobbo, con gli indici 1, 2, 3, 4, e le altre colle combinazioni binarie di questi indici; la retta (1) incontra le tre (12), (13), (14), e la retta (12) incontra le tre (1), (2), (34). Ora, se agli indici isolati 1, 2, 3, 4, aggreghiamo un quinto indice 5, abbiamo, come si vede, e come avevamo asserito, esattamente la seconda delle sopraindicate notazioni.

Adottando pertanto, come più semplice e simmetrica, la prima delle tre rappresentazioni qui trovate, *le 10 rette restano rappresentate dalle combinazioni binarie di 5 indici, e due rette concorrenti corrispondono a due combinazioni senza indici comuni.*

Vi sono 15 piani π contenenti due rette e 15 punti P intersezioni delle medesime.

È noto che si possono formare cinque quaterne gobbe di rette, che hanno una grande importanza nello studio della superficie. Secondo la indicata rappresentazione ciascuna di tali quaterne è data dalle quattro congiungenti uno dei cinque punti cogli altri quattro; quindi *le cinque quaterne gobbe vengono a corrispondere biunivocamente ai cinque punti della rappresentazione.*

(¹) Se la formano con una, la formeranno anche con ciascuna delle altre due.

(²) Vedi p. es. Caporali, Annali di Matematica (2), t. VII, 1875-76, pp. 149-188, [pag. 156].

Adoperando ora lo stesso metodo tenuto nei due paragrafi precedenti, ci si presentano immediatamente tre varietà della superficie generale; e cioè:

a) Tutti i cinque punti sieno reali; *le 10 rette sono tutte reali*;

b) Sieno immaginarî coniugati i punti 1, 2. *Restano solo 4 rette reali di cui una incontra le altre tre che a due a due non si incontrano fra loro. Ogni retta immaginaria non incontra la propria coniugata, quindi esse non hanno punto reale.*

Delle quaterne gobbe ve ne sono 2 formate con una retta reale e tre immaginarie, e 3 formate con due rette reali e due immaginarie coniugate.

Dei 15 piani π ve ne sono tre reali passanti per una stessa retta, e gli altri immaginarî, e dei 15 punti P ve ne sono 3 reali situati su di una retta, e gli altri immaginarî.

c) Sieno immaginarî coniugati i punti 1, 2 e 3, 4. *Restano reali solo due rette concorrenti; quattro altre sono immaginarie con punto reale, e le rimanenti quattro sono immaginarie ma senza punto reale. Vi sono 4 quaterne gobbe formate da una retta reale e tre immaginarie di cui due coniugate, e 1 quaterna formata con quattro rette immaginarie coniugate a due a due.*

Vi sono 3 piani π reali, non aventi alcuna retta (fra le 10) in comune, e 3 punti P reali situati su rette diverse.

Queste sono le varietà che ci si presentano come le uniche possibili dal punto di vista del nostro metodo combinatorio.

Fisica. — *Sulla natura della pressione osmotica.* Nota di A. BATTELLI e A. STEFANINI.

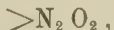
Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sopra alcuni derivati della canfora* ⁽¹⁾. Nota del Corrispondente A. ANGELI e del dott. V. CASTELLANA.

Lo studio dell'azione dell'acido nitroso sopra le ossime di alcuni chetoni terpenici condusse uno di noi e Rimini, ancora nel 1895 ⁽²⁾ alla scoperta dei *pernitrosoderivati*, che stanno in rapporto molto semplice con le sostanze da cui derivano:



dove lasciammo indeterminata la struttura del residuo



per attendere i risultati delle ulteriori ricerche.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel Laboratorio farmaceutico della R. Università di Palermo.

⁽²⁾ Berliner Berichte XXVIII, 1077 e seg.

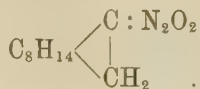
Dello stesso avviso non fu il compianto Tiemann, che quasi contemporaneamente a noi pervenne agli stessi composti; in seguito ad alcune trasformazioni non giustamente interpretate egli concluse che le sostanze in parola sono da considerarsi come *nitrammine* della forma ⁽¹⁾:



È superfluo ripetere qui le considerazioni ed i fatti che uno di noi già espose a suo tempo ⁽²⁾ e che non permettono di accettare la formola di struttura proposta dal Tiemann.

Da allora noi abbiamo fatte poche esperienze sopra questo argomento, perchè la nostra attività è stata in gran parte assorbita da altri studi, che, almeno per noi, presentavano un maggiore interesse e nemmeno avremmo pubblicati i presenti risultati, se non ne avesse offerto occasione un lavoro, recentemente comparso, del prof. Roland Scholl del Politecnico di Karlsruhe ⁽³⁾.

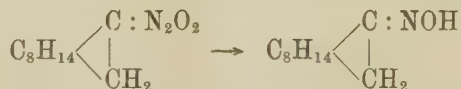
Le nostre ricerche, di cui diamo oggi un breve riassunto riservandoci a più tardi di comunicare i dettagli per esteso, riguardano sopra tutto alcuni prodotti che si ottengono per riduzione della pernitrosocanfora:



Scegliendo opportunamente i mezzi riducenti ⁽⁴⁾ ed operando nelle volute condizioni, ci fu possibile ottenere una serie di sostanze fra cui finora riuscimmo a caratterizzare: bornilammina, canforossima, azoto, canfene e canfanazina. Per lo più si forma anche canfora; in alcuni casi notammo l'acido nitroso ed un composto che, a caldo, riduce il liquido di Fehling; all'aria si altera ed in causa della piccola quantità non ci fu possibile identificarlo. Operando in presenza di acido cloridrico talvolta si formano anche prodotti clorurati.

La bornilammina, un termine di riduzione profonda, per il caso nostro è priva di significato giacchè è noto che nei pernitrosoderivati almeno un atomo di azoto è unito direttamente ad un atomo di carbonio.

Grande interesse invece presenta la formazione (in soluzione acida) della canforossima:



⁽¹⁾ Berliner Berichte XXVIII, 1079 e seg.

⁽²⁾ Angeli, questi Rendiconti, 1897, vol. VI, 2° sem., pag. 26.

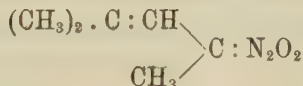
⁽³⁾ Roland Scholl. Liebig's Annalen, 338, pag. 1.

⁽⁴⁾ In alcuni casi, durante il processo di riduzione, i liquidi assumono colorazione violetta.

perchè dimostra che nei pernitrosoderivati è contenuto l'aggruppamento

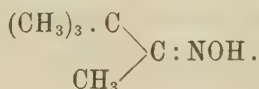


comune alle ossime da cui derivano e da cui si formano per azione dell'acido nitroso. Ciò era d'altronde reso molto probabile dal fatto, scoperto da Harries ⁽¹⁾ che il composto:

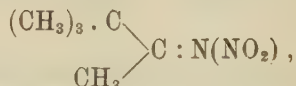


per azione degli alcali viene idrolizzato nelle sostanze che hanno servito a prepararlo, acido nitroso ed ossima dell'ossido di mesitile ⁽²⁾.

La formazione delle ossime nella riduzione dei pernitrosoderivati è stata notata la prima volta dallo Scholl stesso. Trattando infatti con amalgama di alluminio la sostanza che egli chiama pinacolintrimmina, egli ottiene in modo quantitativo la pinacolinossima:



Siccome lo Scholl, seguendo le vedute del Tiemann, attribuisce al suo prodotto la struttura ⁽³⁾:



così egli per spiegare la formazione della pinacolinossima ammette che per riduzione si formi in una prima fase *pinacolina* (ovvero pinacolinimmina) ed *idrossilammina*, le quali reagendo fra loro darebbero origine all'ossima della pinacolina.

Bisogna però notare che la formazione quantitativa della pinacolinossima, seguendo questa interpretazione che dà lo Scholl, implica che si formi in modo quantitativo la pinacolina, che in modo quantitativo si formi idrossilammina e che queste due reagiscano fra loro per dare quantitativamente l'ossima della pinacolina. La cosa, come ognuno vede, è poco verosimile. Ma

⁽¹⁾ Annalen der Chemie, 319, 232.

⁽²⁾ A questo riguardo interessa far notare che anche le isonitrammine di W. Traube possono fornire isonitrosoderivati (Berliner Berichte XXVII, 3293).

⁽³⁾ Un prodotto analogo è stato preparato anche dalla santonina, da Francesconi ed Angelucci (Gazzetta chimica XXXI (2), 302), i quali, per ragioni che ancora non sono riuscito a comprendere, ammettono che tutte queste sostanze contengano l'aggruppamento:



Angelucci, che per il primo ha ridotto la pernitrosocanfora a bornilammina, sostiene tuttora che i pernitrosoderivati si devono considerare come eteri nitrosi delle ossime.

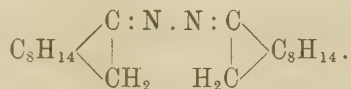
pure ammettendo che questa interpretazione sia esatta, torna invece impossibile spiegare nello stesso modo la formazione della canforossima, per riduzione della pernitrosocanfora.

In questo caso infatti, seguendo l'opinione dello Scholl, bisognerebbe supporre che in una prima fase si formassero canfora ed idrossilammina.

Invece che con amalgama di alluminio in soluzione eterea, noi abbiamo voluto operare in presenza di acido cloridrico; ora è noto che la velocità di formazione della canforossima, da canfora ed idrossilammina, in presenza di un acido energico è nulla ovvero piccolissima (senza pensare che a lungo andare gli acidi minerali tenderebbero a trasformare l'ossima nel nitrile canfolenico) e che l'idrossilammina agisce sulla canfora per dare canforossima solamente in mezzo alcalino ed anche in questo caso con difficoltà; invece la riduzione da noi osservata si compie in brevi istanti ed in presenza di un acido minerale libero, l'acido cloridrico.

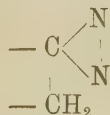
Ciò dimostra che l'interpretazione data da Scholl non è esatta.

Notevole è la comparsa dell'altro gruppo di prodotti: *azoto*, *canfene* e *canfanazina* (p. fus. 185°; picrato p. fus. 210°):

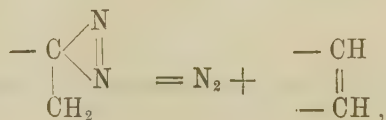


Quest'ultima non era ancora nota, ma la sua struttura rimane stabilita in modo non dubbio perchè trattata con acido solforico diluito subisce l'idrolisi e dà solfato di idrazina e canfora e per il fatto che ci fu possibile ottenere con tutta facilità e con ottimo rendimento la stessa sostanza facendo reagire una molecola di idrazina sopra due molecole di pernitrosocanfora (metodo di Angeli e Rimini).

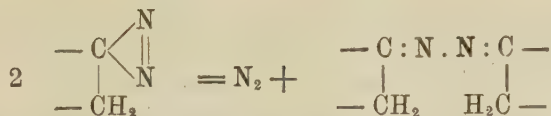
La formazione di questi tre prodotti, per riduzione della pernitrosocanfora, presenta come ognuno vede una grandissima analogia con il comportamento generale dei composti diazoici alifatici. È noto infatti che queste sostanze:



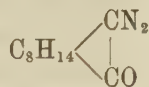
possono perdere tutto l'azoto per dare un prodotto non saturo:



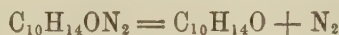
ovvero ne perdono solamente la metà con formazione di *azine* (azocomposti):



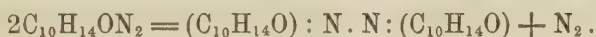
Per mantenersi nei derivati di questo gruppo, come esempio, basti ricordare che parecchi anni addietro, uno di noi, dalla *diazocanfora*



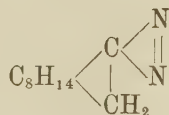
per eliminazione di *azoto* riuscì a preparare il *canfenone* (non saturo):



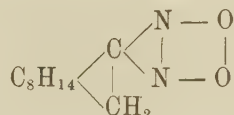
e l'*azina* (azocanfora) corrispondente:



Tale comportamento della pernitrosocanfora dimostra che questa sostanza, nel processo di riduzione, perdendo in una prima fase i due atomi di ossigeno, dà origine con tutta probabilità ad un composto diazoico intermedio, il quale in una fase successiva fornisce i prodotti cui si è accennato. Siccome il residuo da cui tale prodotto deriva non contiene gruppi negativi ⁽¹⁾ ed il processo di riduzione può compiersi anche in mezzo acido, le trasformazioni descritte si spiegano nel modo migliore attribuendo al prodotto diazoico intermedio la forma

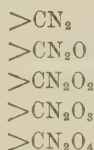


da cui per il pernitrosoderivato ne seguirebbe l'altra ⁽²⁾:



⁽¹⁾ Angeli, Berliner Berichte XXXVII.

⁽²⁾ Secondo questo modo di vedere, tali sostanze completerebbero la serie:



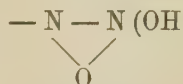
che dai diazocomposti va ai binitroderivati.

già proposta da uno di noi parecchi anni or sono ⁽¹⁾ e nella quale i due atomi di azoto sarebbero uniti ad uno stesso atomo di carbonio.

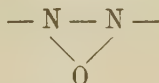
Anche la formazione della trimetildiidropirazolina, osservata da Harries nella riduzione del prodotto ottenuto dall'ossima dell'ossido di mesitile, si spiega bene per mezzo di un processo perfettamente analogo. È noto infatti che i composti diazoici alifatici reagiscono sopra le sostanze contenenti legami multipli per dare derivati del pirazolo.

Che nel processo, scoperto da uno di noi, di isomerizzazione dei pernitrosoderivati uno dei due atomi di azoto si stacchi dal carbonio, non deve recare meraviglia, dal momento che queste stesse sostanze, per mezzo di reazioni che si compiono in modo altrettanto blando, possono perdere tutto il loro azoto.

Lo Scholl, nella prima Memoria ⁽²⁾ affermava che la sua pinacolintrimina rimane inalterata all'azione degli alcali, ma dopo che uno di noi, contrariamente a quanto asseriva Tiemann (la nostra osservazione è stata in seguito confermata da Hantzsch) ⁽³⁾ ha dimostrato che per tale mezzo si ottengono isomeri a funzione acida, egli pure ha riscontrato che il suo prodotto fornisce un isomero, nel quale ammette l'aggruppamento:



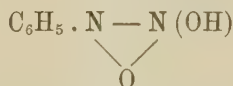
Prescindendo dal valore delle argomentazioni sopra le quali lo Scholl basa tale supposizione, farò notare che oramai è diventata problematica l'esistenza dell'anello:



il quale, più che altro, rappresenta un comodo ripiego. In tal modo per l'acido diazobenzolico:



si arriva allo schema



identico a quello cui si perverrebbe anche per la nitrosopenilidrossilammina (sempre sotto forma di sale), che uno di noi ⁽⁴⁾ ha potuto preparare facendo

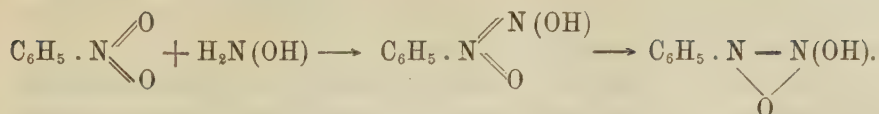
⁽¹⁾ Questi Rendiconti 1897, vol. VI, 2° sem., pag. 28.

⁽²⁾ Berliner Berichte XXVIII, 1361.

⁽³⁾ Ibid., XXXV, 260.

⁽⁴⁾ Angeli, Berliner Berichte XXIX, 1884.

reagire l'idrossilammina sopra il nitrobenzolo:



Così si finirebbe con l'assegnare una stessa formola di struttura a due sostanze essenzialmente diverse, ciò che a quanto io mi sappia non si è mai verificato nella chimica dei composti azotati.

Lo Scholl asserisce in seguito, che uno di noi ⁽¹⁾ ha trovato un mezzo sicuro (inattività rispetto al diazometano) per stabilire che i pernitrosoderivati sono da considerarsi come vere nitrimmine, ma aggiunge che lo stesso non seppe ricavare altra conclusione. E qui farò osservare al prof. Scholl che io mi sono limitato a giovarmi di questo mezzo diagnostico (diazometano) per dimostrare che la formola proposta da Tiemann non si poteva accettare e che altre conclusioni non ho voluto ricavare perchè i fatti non mi autorizzavano a farlo; e nemmeno Scholl ha saputo fare di più.

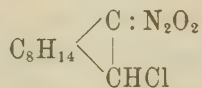
Ancora nella prima comunicazione, uno di noi, contrariamente a quanto Tiemann e Mahla asserivano, aveva detto che la pernitrosocanfora non dà la reazione di Liebermann; nel suo ultimo lavoro lo Scholl sostiene che questa sostanza presenta la reazione in modo perfetto. Nel timore di non aver ancora imparato ad eseguire questo saggio e quindi di essere io dalla parte del torto. ho ripetuta questa reazione ed anche fatta ripetere da qualche collega di altissima competenza: ma la reazione di Liebermann non si potè osservare. Alla soluzione di fenolo puro in acido solforico, ho aggiunta la pernitrosocanfora: non si ha colorazione. Versato il liquido in acqua e trattando con eccesso di idrato sodico si nota una colorazione azzurrognola che tosto scompare. La sostanza non presenta quindi la reazione di Liebermann, e solamente un osservatore superficiale può scambiare per tale il fugace mutamento di tinta accennato. Allo scopo di escludere che la mancanza delle colorazioni che caratterizzano la reazione di Liebermann fosse dovuta ad un'azione ossidante secondaria esercitata dalla pernitrosocanfora stessa, eseguiamo questi altri due saggi: al liquido alcalino azzurro ottenuto da una vera nitrosammina (dalla piperazina) aggiungemmo pernitrosocanfora: il colore rimane inalterato. Al miscuglio di fenolo, acido solforico e della stessa nitrosammina si aggiunse del pari pernitrosocanfora: per trattamento con idrato sodico si ottiene egualmente il liquido azzurro. La pernitrosocanfora non altera perciò la sostanza colorante azzurra e quindi non presenta la reazione di Liebermann.

D'altra parte la differenza dei risultati ottenuti da me e da Scholl si spiega facilmente, giacchè questo chimico ricorre ad un artificio che in questo caso non è permesso: invece di impiegare fenolo puro ed acido sol-

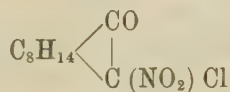
⁽¹⁾ Angeli, questi Rendiconti 1897, vol. VI, 2° sem., pag. 27.

forico, egli versa sopra l'acido solforico fenolo ed acqua ed in seguito aggiunge la pernitrosocanfora: in questo caso avviene, naturalmente, riscaldamento e da ciò le colorazioni da lui osservate ⁽¹⁾.

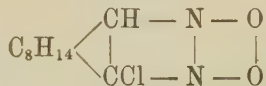
Lo Scholl ha trovato che il sale sodico della sua pinacolinnitrimmina, per azione del joduro metile, fornisce un etere col metile unito all'azoto, perchè bollito con acido cloridrico fornisce metilammina (l'odore di metilammina lo avverte anche senza bisogno di trattare con acido) mentre invece dal sale argentario otterrebbe un etere col metile unito all'ossigeno. A questo fatto lo Scholl attribuisce un'importanza che secondo noi non è affatto giustificata, giacchè egli non determina la struttura di questi eteri e perciò tanto meno stabilisce in quale rapporto essi stieno con la sostanza fondamentale da cui derivano. Nei composti ossigenati dell'azoto, gli atomi sono dotati di un'estrema mobilità: basti ricordare il fatto, da noi trovato, che la cloro-pernitrosocanfora ⁽²⁾:



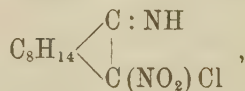
per alternato trattamento con basi e con acidi, fornisce con tutta facilità per lo meno quattro differenti isomeri, il terzo dei quali, la pseudocloropernitrosocanfora, bollito a lungo con acido solforico diluito, si trasforma in un nitroderivato (assieme ad ammoniaca), la cloronitrocanfora di Cazeneuve:



Per questa ragione noi attribuiamo alla pseudocloropernitrosocanfora, di proprietà lievemente basiche, una struttura come la seguente:



la quale darebbe anche ragione dell'indifferenza della sostanza rispetto alla maggior parte dei reattivi: come termine di passaggio, fra la pseudocloropernitrosocanfora e la cloronitrocanfora noi ammetteremo una sostanza della forma:



la quale darebbe completamente ragione dei prodotti che si ottengono nella

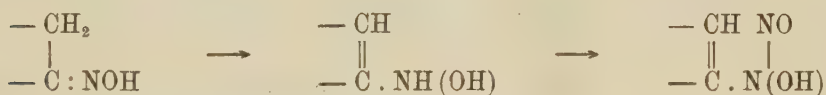
(¹) La reazione di Liebermann è senza dubbio dovuta alla formazione di ossidi dell'azoto; perciò nella maggior parte dei casi e con vantaggio, invece di fenolo ed acido solforico, io impiego una soluzione solforica di difenilammina: colorazione azzurra.

(²) Questi Rend. 1903, vol. XII, 1° sem., pag. 428.

scissione operata dall'acido solforico. Che alla pseudocloropernitrosocanfora stessa possa spettare questa formola (come vorrebbe lo Scholl) non è ammissibile e già a suo tempo abbiamo esposto per quali ragioni. Lo Scholl pone in rilievo che nelle nitrammine aromatiche il residuo nitrico può migrare dall'azoto al carbonio; ma noi gli ricorderemo che questa proprietà non è caratteristica delle nitrammine soltanto, giacchè la stessa trasposizione viene anche presentata da alcune nitrosoidrossilammine, che con le prime sono isomere ma di costituzione ben diversa.

Accenneremo infine che anche il modo di formazione della pernitroso-canfora immaginato da Scholl è molto artificioso.

Se non si vuole supporre che in una prima fase l'acido nitroso reagisca sopra le ossime come fanno gli ipocloriti ed ipobromiti, sarebbe assai più semplice ammettere che in questo caso la canforossima si comporti come una idrossilammina (è noto che anche la canforossima per azione degli ossidanti dà prodotti colorati in verde od in azzurro, vale a dire veri nitrosoderivati); come tale, per azione dell'acido nitroso fornirà il corrispondente nitroso-composto:



il quale poi assumerebbe il nuovo assetto di pernitrosoderivato.

Non crediamo con questo d'aver detto l'ultima parola e tanto meno di aver fissata in modo definitivo la formola di struttura della pernitrosocanfora. Una esperienza oramai lunga ci ha imposto un necessario riserbo e ci ha insegnato che si deve essere molto cauti, specialmente quando si vuole dedurre la costituzione dei composti ossigenati dell'azoto studiando i loro prodotti di trasformazione. In questo caso si incontrano sovente difficoltà che sono tanto maggiori quanto più semplice è il residuo azotato e la chimica dell'acido fulminico ne porge il migliore esempio.

Nella Gazzetta chimica faremo seguire i dati sperimentali che si riferiscono alla presente comunicazione.

Matematica. — *Sulle coppie di varietà geodeticamente applicabili.* Nota di GUIDO FUBINI, presentata dal Socio L. BIANCHI.

1. Il problema, così importante per la teoria dei sistemi dinamici ologonimi e per la geometria differenziale degli iperspazii, di trovare tutte le coppie di varietà geodeticamente applicabili (rappresentabili l'una sull'altra con conservazione delle geodetiche) fu risoluto per le superficie dal prof. Dini, nel caso generale dal prof. Levi-Civita (Annali di Matematica 1896). Ecco il risultato del prof. Levi-Civita: *Se due varietà sono geodeticamente applicabili, i loro elementi lineari sono riducibili alla forma:*

$$(1) \quad \sum_{l=1}^{n-m+1} \left[H'_j(\psi_{p_j} - \psi_{p_l}) \sum_{r,s=p_{l-1}+1}^{p_l} K_{rs} dx_r dx_s \right]$$

$$(2) \quad ds^2 = \frac{1}{(\alpha\psi_{p_1} + \beta)(\alpha\psi_{p_2} + \beta) \dots (\alpha\psi_{p_{n-m+1}} + \beta)} \sum_{l=1}^{n-m+1} \frac{1}{\alpha\psi_{p_l} + \beta} \times \\ \times \left[H'_j(\psi_{p_j} - \psi_{p_l}) \sum_{r,s=p_{l-1}+1}^{p_l} K_{rs} dx_r dx_s \right].$$

Il significato dei varî simboli è il seguente:

I numeri $p_1, \dots, p_{n-m+1}$ sono numeri interi positivi posti in ordine crescente; p_0 è uguale a zero; m è un intero minore dell'intero n ; α, β sono costanti arbitrarie. La ψ_{p_l} è funzione di x_{p_l} se $p_{l-1} + 1 = p_l$; se invece $p_l > p_{l-1} + 1$, la ψ_{p_l} è una costante. Le K_{rs} , dove r, s sono indici compresi tra $p_{l-1} + 1$ e p_l sono funzioni qualsiasi di $x_{p_{l-1}+1}, x_{p_{l-1}+2}, \dots, x_{p_l}$. Se $p_l = p_{l-1} + 1$, allora di tali K_{rs} havvene una sola, a cui si può dare il valore 1.

Infine nei fattoriali $H'_j(\psi_{p_j} - \psi_{p_l})$, j percorre tutti i valori $1, 2, \dots, n - m + 1$, eccetto che il valore $j = l$.

2. A un elemento lineare del tipo (1) noi daremo il nome di elemento lineare di Levi-Civita.

Una questione intimamente connessa alla precedente è la seguente: *Trovare tutte le varietà geodeticamente applicabili su una varietà (1) di Levi-Civita.* È evidente, per quanto abbiamo detto, che questa questione è equivalente alla seguente: *Dato un elemento lineare (1), si riconosca se esistono dei cambiamenti di variabili coordinate, che trasformino l'elemento (1) di Levi-Civita in un altro elemento lineare pure di Levi-Civita, e, in caso affermativo, si determinino tutti questi cambiamenti di variabili.*

È infatti ben chiaro che a ogni riduzione di un elemento lineare (1) al tipo di Levi-Civita corrisponde, per il teorema precedente, una classe di elementi lineari (varietà) geodeticamente applicabili su (1).

Questa questione è importante per la teoria dei sistemi olonomi, e per la teoria delle geodetiche: essa fu risolta nel modo più brillante dal Königs per il caso della superficie (varietà a due dimensioni) (cfr. la Nota di Königs nel 4° volume della *Théorie des surfaces* di G. Darboux) ⁽¹⁾. Noi ora risolveremo in due modi lo stesso problema per gli spazî a r dimensioni ($r > 2$), usando altri metodi, e di più *caratterizzeremo invariantivamente gli spazî del tipo* (1): i risultati sono semplicissimi. Cominceremo dal caso $r = 3$; gli elementi di Levi-Civita sono di uno dei tipi:

$$(A) \quad ds^2 = (\psi_1 - \psi_2)(\psi_1 - \psi_3) dx_1^2 + (\psi_2 - \psi_1)(\psi_2 - \psi_3) dx_2^2 + \\ + (\psi_3 - \psi_1)(\psi_3 - \psi_2) dx_3^2 \\ ds^2 = (\psi_1 - h) dx_1^2 + (h - \psi_1)(E dx_2^2 + 2F dx_2 dx_3 + G dx_3^2),$$

dove ψ_i è funzione di x_i , h è costante, E, F, G sono funzioni di x_2, x_3 . Il secondo di questi elementi lineari si può con un cambiamento di coordinate ridurre al tipo:

$$(B) \quad ds^2 = dx_1^2 + \psi_1 \mu(dx_2^2 + dx_3^2)$$

dove μ è funzione di x_2, x_3 .

Indicherò al solito con (ij, lk) ($i, j, l, k = 1, 2, 3$) i noti simboli a quattro indici di prima specie di Riemann. Come è noto, essi sono nulli, se $i = j$, oppure $l = k$; essi cambiano di segno, permutando i con j , o l con k ; è infine $(ij, lk) = (lk, ij)$. Tanto per l'elemento (A), quanto per l'elemento (B) è $(21, 23) = (31, 32) = (21, 23) = 0$; quindi affinchè in ogni punto la varietà sia a curvatura costante k , è necessario e sufficiente che:

$$(3) \quad (12, 12) - ka_{11} a_{22} = (23, 23) - ka_{22} a_{33} = (31, 31) - ka_{33} a_{11} = 0.$$

In tal caso, per un teorema di Schur, k è una costante effettiva. Con a_{ik} indico al solito il coefficiente di $dx_i dx_k$ in (A) o in (B). Esista ora un cambiamento di variabili, che porti (A) o (B) in un elemento lineare del tipo (A) o (B). Indichiamo con y_i , con b_{ik} , con $(ji, lk)_y$ le nuove varia-

⁽¹⁾ In questo caso l'elemento (1) si riduce a un elemento lineare di Liouville $ds^2 = (U_1 + U_2)(dx_1^2 + dx_2^2)$ (U_i funzione di x_i). Si potrebbe dare il nome di elementi di Liouville agli elementi $ds^2 = \sum_i U_i \sum_k dx_k^2$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$) (U_i funzione di x_i) e chiedere quando esiste una trasformazione di coordinate che muta un elemento di Liouville in un altro di Liouville. La questione si risolve nel modo più semplice, osservando che una tale trasformazione dovrebbe essere una trasformazione conforme per l'elemento lineare euclideo $\sum dx_k^2$ (questa condizione non è evidentemente sufficiente).

bili, i nuovi coefficienti, i nuovi simboli a 4 indici del nuovo elemento lineare. Porrò poi

$$(i, j) = \frac{\partial x_i}{\partial y_j}, \quad \binom{i j}{l k} = \frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(y_l, y_k)} = \binom{(i l) (j k)}{(j l) (i k)} \quad (i, j, l, k = 1, 2, 3).$$

Indicherò con J l'Jacobiano, certamente non nullo, delle x rispetto alle y . È ben noto che

$$(4) \quad (i j, l k)_y = \sum_{\alpha\beta, \gamma\delta} (\alpha\beta, \gamma\delta) (\alpha, i) (\beta, j) (\gamma, l) (\delta, k).$$

Di più, poichè $b_{ik} = 0$ per $i \neq k$, avremo che:

$$(5) \quad a_{11}(1, i)(1, k) + a_{22}(2, i)(2, k) + a_{33}(3, i)(3, k) = 0 \\ (i, k = 1, 2, 3; i \neq k).$$

Sostituendo in (4) a $(ij, lk)_y$ successivamente i simboli $(21, 23)_y$, $(31, 32)_y$, che sono chiaramente nulli, e ricordando le relazioni, accennate più sopra tra i simboli $(\alpha\beta, \gamma\delta)$ avremo che:

$$(6) \quad 0 = \left[(23, 23) \binom{23}{23} \right] \binom{23}{12} + \left[(31, 31) \binom{31}{23} \right] \binom{31}{12} + \\ + \left[(12, 12) \binom{12}{23} \right] \binom{12}{12}$$

$$(7) \quad 0 = \left[(23, 23) \binom{23}{23} \right] \binom{23}{13} + \left[(31, 31) \binom{31}{23} \right] \binom{31}{13} + \\ + \left[(12, 12) \binom{12}{23} \right] \binom{12}{13}.$$

Confrontando le (6), (7) con le identità

$$(1, 1) \binom{23}{1t} + (2, 1) \binom{31}{1t} + (3, 1) \binom{12}{1t} = 0 \quad (t = 2, 3) \quad (1)$$

otteniamo tosto, poichè $J \neq 0$:

$$(23, 23) \binom{23}{23} : (31, 31) \binom{31}{23} : (12, 12) \binom{12}{23} = (1, 1) : (2, 1) : (3, 1).$$

Siccome poi le $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$ non possono essere contemporaneamente nulle (perchè $J \neq 0$), potremo quindi scrivere:

$$(8) \quad (23, 23) \binom{23}{23} = \varrho_1(1, 1); \quad (31, 31) \binom{31}{23} = \varrho_1(2, 1); \\ (12, 12) \binom{12}{23} = \varrho_1(3, 1)$$

(1) Queste due equazioni costituiscono, si ricordi, due relazioni *distinte* tra le $(k, 1)$ ($k = 1, 2, 3$); chè, se ciò non fosse, sarebbe (per noti teoremi sui determinanti) $J = 0$.

dove ϱ_1 è una quantità finita. Poniamo ora nella (5) successivamente $i = 1$, $k = 2$ e $i = 1$, $k = 3$. Otterremo, risolvendo le equazioni così ottenute rispetto alle $a_{ii}(i, 1)$, che

$$(9) \quad a_{11}(1, 1) = \sigma_1 \begin{pmatrix} 23 \\ 23 \end{pmatrix}; \quad a_{22}(2, 1) = \sigma_1 \begin{pmatrix} 31 \\ 23 \end{pmatrix}; \quad a_{33}(3, 1) = \sigma_1 \begin{pmatrix} 12 \\ 23 \end{pmatrix}$$

dove σ_1 è un fattore di proporzionalità, nè nullo, nè infinito. (Se $\sigma_1 = 0$ sarebbe $(1, 1) = (2, 1) = (3, 1) = 0$ e quindi $J = 0$; se $\sigma_1 = \infty$ sarebbero nulli i minori $\begin{pmatrix} 23 \\ 23 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 31 \\ 31 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 12 \\ 23 \end{pmatrix}$ e quindi $J = 0$). Ricordando questo fatto, confrontando le (8), (9) e osservando che certamente $a_{ii} \neq 0$, otteniamo:

$$(10) \quad [a_{11}(23, 23) - \varrho_1 \sigma_1](1, 1) = [a_{22}(31, 31) - \varrho_1 \sigma_1](2, 1) = \\ = [a_{33}(12, 12) - \varrho_1 \sigma_1](3, 1) = 0.$$

Valgono evidentemente equazioni analoghe, che si ottengono rotando gli indici 1, 2, 3.

3. Per comodità di discorso, noi diremo elemento (B) un elemento, che si possa considerare insieme del tipo (A) e del tipo (B). Noi escluderemo senz'altro che l'elemento considerato sia *a curvatura costante*: questo caso non c'interessa per nulla, perchè è ben noto, da teoremi del Beltrami, che gli spazî applicabili geodeticamente su uno spazio a curvatura costante sono *tutti e soli* gli spazî pure a curvatura costante. Studieremo anzitutto il caso (B); è allora $(12, 12) = (31, 31)$ e $a_{22} = a_{33}$. Supponiamo dapprima che $(2, 1) = (3, 1) = 0$; allora, poichè $J \neq 0$, sarà $(1, 1) \neq 0$; e, poichè $a_{11} \neq 0$, avremo dalle (5) [dove si faccia successivamente $i = 1$, $k = 2$ e $i = 1$, $k = 3$] che $(1, 2) = (1, 3) = 0$.

Sarà quindi $x_1 = x_1(y_1)$; $x_2 = x_2(y_2, y_3)$; $x_3 = x_3(y_2, y_3)$. Una tale trasformazione non può portare un elemento (B) in un elemento di tipo (A), ma soltanto in un elemento di tipo (B): ciò che avviene soltanto se $x_1 = \pm y_1 + \text{cost}$ e se la $x_2 = x_2(y_2, y_3)$, $x_3 = x_3(y_2, y_3)$ è una trasformazione conforme per $dx_2^2 + dx_3^2$.

Ponendo $x_1 = z_1$, $x_2 + ix_3 = z_2$, $x_2 - ix_3 = z_3$, potremo dire che la nostra trasformazione deve intanto trasformare in sè il sistema delle $z_1 = \text{cost}$, $z_2 = \text{cost}$, $z_3 = \text{cost}$.

Supponiamo ora che almeno una delle $(2, 1)$, $(3, 1)$ non sia nulla; supponiamo p. es. che $(2, 1) \neq 0$. Per le (10) sarà $a_{22}(31, 31) = \varrho_1 \sigma_1$. Se fosse anche $a_{11}(23, 23) = \varrho_1 \sigma_1$, allora, poichè $a_{22}(31, 31) = a_{33}(21, 21)$, sarebbero soddisfatte le (3), dove si ponesse $k = \frac{\varrho_1 \sigma_1}{a_{11} a_{22} a_{33}}$; e quindi noi saremmo nel caso escluso di spazî a curvatura costante. È perciò $a_{11}(23, 23) \neq \varrho_1 \sigma_1$; e quindi, per le (10), sarà $(1, 1) = 0$. Poichè $J \neq 0$, almeno una delle

$(1, 2), (1, 3)$ è differente da zero. Sia p. es. $(1, 2) \neq 0$. Sostituendo nelle (10) gli indici 2, 3, 1 agli indici 1, 2, 3, otterremo:

$$(10^{bis}) \quad 0 = [a_{11}(23, 23) - \varrho_2 \sigma_2](1, 2) = [a_{22}(31, 31) - \varrho_2 \sigma_2](2, 2) = \\ = [a_{33}(12, 12) - \varrho_3 \sigma_3](3, 2).$$

E quindi sarà $a_{11}(23, 23) = \varrho_2 \sigma_2$. Ma poichè, come dicemmo, $a_{11}(23, 23) \neq a_{22}(12, 12)$, avremo che $(2, 2) = 0$ e analogamente $(3, 2) = 0$. Se ora fosse anche $(1, 3) \neq 0$, si dimostrerebbe analogamente che $(2, 3) = (3, 3) = 0$ e se ne trarrebbe $J = 0$. È dunque $(1, 3) = 0$ e la nostra trasformazione è del tipo: $x_1 = x_1(y_2); x_2 = x_2(y_1, y_3); (l = 2, 3)$. Essa non può chiaramente portare un elemento (B) in un elemento (A); se essa portasse l'elemento (B) in un altro elemento di tipo (B), sarebbe:

$$(11) \quad (2, 1)(2, 3) + (3, 1)(3, 3) = 0; (2, 1)^2 + (3, 1)^2 = 1; \\ (1, 2)^2 = (2, 3)^2 + (3, 3)^2.$$

Poichè $(1, 1) = 0$, $J \neq 0$, almeno una delle $(2, 1), (3, 1)$ non è nulla: quindi per la prima delle (11) traggiamo (indicando con λ una costante finita):

$$(12) \quad (3, 3) = \lambda(2, 1); (2, 3) = -\lambda(3, 1).$$

L'ultima delle (11) diventa in virtù della seconda delle (11) e delle (12) $\lambda^2 = (1, 2)^2$. Dunque λ è funzione soltanto di y_2 e quindi [per le (12)] essa è una costante effettiva. L'elemento trasformato di (B) è perciò $dy_1^2 + \lambda^2(dy_2^2 + dy_3^2)$ ($\lambda = \text{cost}$), ed è perciò euclideo; altrettanto avverrebbe quindi di (B): ciò che noi abbiamo già escluso dalle nostre ricerche.

4. Studieremo ora il caso (A). È fondamentale l'osservazione:

I simboli $(21, 23), (31, 32), (12, 13)$ sono nulli; la quantità $a_{ii}[a_{jj}(ik, ik) - a_{kk}(ij, ij)]$ ($i \neq j \neq k$) è simmetrica negli indici 1, 2, 3 (come dimostra il calcolo effettivo); cosicchè, se $a_{11}(23, 23) = a_{22}(31, 31)$, è anche $a_{33}(12, 12) = a_{11}(23, 23)$ e quindi sono verificate le (3), ossia lo spazio è a curvatura costante.

Escluso questo caso, le $a_{11}(23, 23) - \varrho_1 \sigma_1$, $a_{22}(31, 31) - \varrho_1 \sigma_1$, $a_{33}(12, 12) - \varrho_1 \sigma_1$ sono a due a due distinte: una sola è quindi al massimo uguale a zero; e quindi per le (10) almeno due delle $(1, 1), (2, 1), (3, 1)$ sono nulle. Così pure almeno due delle $(1, 2), (2, 2), (3, 2)$ e almeno due delle $(1, 3), (2, 3), (3, 3)$ sono nulle. Poichè $J \neq 0$, ne traggiamo subito che la nostra trasformazione si riduce a una permutazione delle schiere di superficie $x_1 = \text{cost}$, $x_2 = \text{cost}$, $x_3 = \text{cost}$. Convenendo di dire che per (A) le $x_i = \text{cost}$ e per B le $z_i = \text{cost}$ (cfr. § 3) formano un sistema di Levi-Civita, potremo riassumere i nostri risultati nel modo seguente:

Una varietà a tre dimensioni, che contiene più di un sistema di Levi-Civita è a curvatura costante; escluso questo caso, una trasformazione, che porti un sistema di Levi-Civita in un sistema di Levi-Civita può al massimo soltanto permutare le tre schiere di superficie, che costituiscono il sistema.

Ora, perchè uno spazio V a tre dimensioni, che ammette un gruppo G geodetico, contiene un sistema di Levi-Civita ⁽¹⁾, trasformato da almeno una trasformazione di G in un sistema pure di Levi-Civita, avremo: *Un tale spazio V , o è a curvatura costante, o possiede uno e un solo sistema di Levi-Civita, invariante per il gruppo G .* Questo è il teorema fondamentale della mia Mem. citata.

5. Interpretteremo ora geometricamente le nostre considerazioni. Il primo teorema del § 4 ci dice in sostanza: *Per uno spazio (A) le linee coordinate x_1, x_2, x_3 formano le tre congruenze principali (nel senso di Schur e Ricci); le curvature principali corrispondenti sono a due a due distinte, se lo spazio non è a curvatura costante.*

Cor. I). Ne discende tosto che (esclusi gli spazî a curvatura costante) *uno spazio (A) non può possedere più di due sistemi di Levi-Civita del tipo (A), perchè (essendo le curvature principali a due a due distinte) le congruenze principali sono determinate.*

Cor. II). *Affinchè una metrica sia riducibile al tipo (A) è condizione necessaria e sufficiente che essa sia a curvatura costante (nel qual caso le $x_i = \text{cost}$ formano un sistema di quadriche confocali (cfr. loc. cit.)) oppure che le curvature principali siano a due distinte, le congruenze principali siano normali, e, assunte come linee coordinate, diano all'elemento lineare precisamente la forma (A).* Queste condizioni sono invariantive si possono facilmente scrivere coi simboli del prof. Ricci.

Uno spazio B invece ha uguali due delle curvature principali: esso non può quindi essere riducibile al tipo (A), se non è a curvatura costante. Le congruenze principali non sono quindi univocamente determinate; ma invece le $z_1 = \text{cost}$, $z_2 = \text{cost}$, $z_3 = \text{cost}$ sono determinate senza ambiguità. Perciò anche uno spazio (B) non contiene più di un sistema di Levi-Civita. Condizione necessaria e sufficiente affinchè uno spazio sia riducibile al tipo B, è che una terna di congruenze principali si possa assumere come terna di congruenze coordinate, e che l'elemento lineare diventi in tal guisa del tipo (B). Anche questa è una condizione invariantiva. Dello sviluppo dei concetti precedenti per il caso di spazî a più che 3 dimensioni io mi occuperò in un'altra Nota.

⁽¹⁾ Cfr. la Mem. dell'A.: *Sui gruppi di trasformazioni geodetiche*, Mem. dell'Accademia di Torino, 1903.

Matematica. — *Sulle superficie W⁽¹⁾ applicabili sopra superficie di rotazione.* Nota del dott. ARCADIO TAGLIAFERRI, presentata dal Socio L. BIANCHI.

Riferendo la superficie generica di questa classe che noi vogliamo studiare al sistema isoterma (u, v) formato dalle deformate dei meridiani e dei paralleli, potremo supporre, come è noto, l'elemento lineare ridotto alla forma:

$$(1) \quad ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2),$$

dove λ è una funzione della sola u .

Calcolando la curvatura assoluta otterremo:

$$(2) \quad K = -\frac{1}{\lambda^2} \frac{d^2 \log \lambda}{du^2},$$

quindi K sarà funzione di u soltanto.

Come è noto, per ogni superficie W dovrà essere soddisfatta identicamente la relazione:

$$(3) \quad \frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial K}{\partial v} = \frac{\partial H}{\partial v} \frac{\partial K}{\partial u},$$

dove H e K indicano rispettivamente la curvatura media e quella assoluta della superficie W ; ed u e v sono due variabili indipendenti qualunque.

Nel caso nostro la (3) diviene:

$$(4) \quad \frac{\partial H}{\partial v} = 0,$$

cioè H funzione della sola u .

Prendiamo le equazioni di Codazzi:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial v} - \frac{\partial \mathfrak{D}'}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \mathfrak{D} + \left(\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \right) \mathfrak{D}' + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \mathfrak{D}'' = 0, \\ \frac{\partial \mathfrak{D}''}{\partial u} - \frac{\partial \mathfrak{D}'}{\partial v} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \mathfrak{D} + \left(\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \right) \mathfrak{D}' - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \mathfrak{D}'' = 0. \end{cases}$$

(¹) Come è noto, si indicano col nome di *superficie W* quelle superficie i cui raggi principali di curvatura sono funzioni l'uno dell'altro.

Osservando che nel nostro caso abbiamo:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{du}, \quad \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 2 \end{pmatrix} = 0, \\ \begin{pmatrix} 22 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{du}, \end{aligned}$$

le (5) si riducono alle seguenti:

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial v} - \frac{\partial \mathfrak{D}'}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial \mathfrak{D}''}{\partial u} - \frac{\partial \mathfrak{D}'}{\partial v} - \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{du} \mathfrak{D} - \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{du} \mathfrak{D}'' = 0. \end{cases}$$

Dall'equazione di Gauss e dall'espressione della curvatura media ricaviamo le due relazioni:

$$(7) \quad \mathfrak{D} \mathfrak{D}'' - \mathfrak{D}'^2 = K \lambda^2,$$

$$(8) \quad \mathfrak{D} + \mathfrak{D}'' = -\lambda^2 H.$$

Ora, come abbiamo osservato poco prima, H e K e così pure la quantità λ sono funzioni della sola u , se dunque si pone:

$$(9) \quad \begin{cases} \mathfrak{D} = A + B \cos \omega \\ \mathfrak{D}' = B \sin \omega \\ \mathfrak{D}'' = A - B \cos \omega \end{cases}$$

(dove $A = -\frac{H\lambda^2}{2}$ e $B^2 = \left(\frac{H^2}{4} - K\right) \lambda^4$) anche A e B saranno funzioni della sola u , mentre ω sarà generalmente funzione di u e di v .

Dall'equazione differenziale delle linee di curvatura:

$$du^2 - 2 \cotg \omega \, du \, dv - dv^2 = 0,$$

si riconosce subito che ω rappresenta il doppio dell'angolo che un sistema di linee di curvatura formano colle linee $v = \text{cost.}$ Eliminando $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ dall'equazione (7) mediante le (9) e ponendo inoltre per K il suo valore dato dalla (2) avremo:

$$(10) \quad \frac{\lambda^2 d^2 \log \lambda}{du^2} = B^2 - A^2.$$

Dalle (9) ricaviamo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial v} &= -B \operatorname{sen} \omega \frac{\partial \omega}{\partial v}, \\ \frac{\partial \mathfrak{D}'}{\partial u} &= \operatorname{sen} \omega \frac{dB}{du} + B \cos \omega \frac{\partial \omega}{\partial u}, \\ \frac{\partial \mathfrak{D}'}{\partial v} &= B \cos \omega \frac{\partial \omega}{\partial v}, \\ \frac{\partial \mathfrak{D}''}{\partial u} &= \frac{dA}{du} - \cos \omega \frac{dB}{du} + B \operatorname{sen} \omega \frac{\partial \omega}{\partial u}.\end{aligned}$$

Sostituendo nelle (6):

$$(11) \quad \begin{cases} B \left(\cos \omega \frac{\partial \omega}{\partial u} + \operatorname{sen} \omega \frac{\partial \omega}{\partial v} \right) = -\operatorname{sen} \omega \frac{dB}{du} \\ B \left(\operatorname{sen} \omega \frac{\partial \omega}{\partial u} - \cos \omega \frac{\partial \omega}{\partial v} \right) = \cos \omega \frac{dB}{du} + \frac{2A}{\lambda} \frac{d\lambda}{du} - \frac{dA}{du} \end{cases}$$

ovvero:

$$(12) \quad \begin{cases} B \left(\cos \omega \frac{\partial \omega}{\partial u} + \operatorname{sen} \omega \frac{\partial \omega}{\partial v} \right) = -\operatorname{sen} \omega \frac{dB}{du}, \\ B \left(\operatorname{sen} \omega \frac{\partial \omega}{\partial u} - \cos \omega \frac{\partial \omega}{\partial v} \right) = \cos \omega \frac{dB}{du} - \lambda^2 \frac{d\frac{A}{\lambda^2}}{du}.\end{cases}$$

Poniamo:

$$B = \varphi \lambda, \quad A = -\delta \lambda^2,$$

donde si riconosce facilmente che δ è la metà della curvatura media.

La (10) diviene:

$$(13) \quad \frac{d^2 \log \lambda}{du^2} = \varphi^2 - \lambda^2 \delta^2,$$

e le (12) si scriveranno:

$$(14) \quad \begin{cases} \cos \omega \frac{\partial \omega}{\partial u} + \operatorname{sen} \omega \frac{\partial \omega}{\partial v} = -\operatorname{sen} \omega \frac{d \log \lambda \varphi}{du}, \\ \operatorname{sen} \omega \frac{\partial \omega}{\partial u} - \cos \omega \frac{\partial \omega}{\partial v} = \cos \omega \frac{d \log \lambda \varphi}{du} + \frac{\lambda}{\varphi} \frac{d\delta}{du}, \end{cases}$$

dalle quali ricaviamo facilmente:

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial u} = \frac{\lambda}{\varphi} \frac{d\delta}{du} \operatorname{sen} \omega \\ \frac{\partial \omega}{\partial v} = -\frac{d \log \lambda \varphi}{du} - \frac{\lambda}{\varphi} \frac{d\delta}{du} \cos \omega. \end{cases}$$

Ora, esprimendo la condizione d'integrabilità:

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \omega}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \omega}{\partial v} \right),$$

otterremo:

$$(16) \left\{ \frac{\lambda}{\varphi} \frac{d\delta}{du} \frac{d \log \lambda \varphi}{du} - \frac{d}{du} \left(\frac{\lambda}{\varphi} \frac{d\delta}{du} \right) \right\} \cos \omega + \left(\frac{\lambda}{\varphi} \frac{d\delta}{du} \right)^2 - \frac{d^2 \log \lambda \varphi}{du^2} = 0.$$

In generale questa equazione per un medesimo sistema di valori di λ, δ, φ fornisce un solo valore di $\cos \omega$, ed affinchè il problema ammetta soluzioni deve questo valore soddisfare le (15).

A meno che la (16) non sia una identità in $\cos \omega$ nel qual caso le (5) integrate forniscono per ω una funzione contenente una costante arbitraria.

Nel caso in cui la (16) sia identicamente soddisfatta in $\cos \omega$; la superficie ammette una deformazione continua in cui rimane costante la curvatura media δ , ed il problema si riduce a quello risoluto dal Bonnet (¹).

Se l'equazione (16) non si riduce ad una identità, ci resta ancora da esaminare il caso in cui il valore di $\cos \omega$ ricavato da questa equazione possa soddisfare alle (15); in questo caso essendo ω funzione di u soltanto anche $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}', \mathfrak{D}''$ saranno funzioni della sola u , e quindi le superficie saranno elicoidi, e reciprocamente ogni superficie elicoidale è una superficie W applicabile sopra una superficie di rotazione.

Come conclusione di questo breve studio possiamo dunque enunciare il teorema seguente:

Le uniche superficie applicabili sopra superficie di rivoluzione, e coi raggi principali di curvatura funzioni l'uno dell'altro, sono le superficie elicoidali e quelle superficie, determinate dal Bonnet, che ammettono una deformazione continua, nella quale restano invariati i raggi principali di curvatura.

Fisica. — *Acumetro telefonico a solenoide neutro.* Nota di ANNIBALE STEFANINI, presentata dal Corrispondente A. BATTELLI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

(¹) Journal de l'École Polytechnique, 42^e Cahier, 1867, pag. 72.

Mineralogia. — *Analisi ponderale e spettroscopica di nuove blende sarde* ⁽¹⁾. Nota del dott. C. RIMATORI, presentata dal Socio G. STRUEVER.

Come accennai in una Nota precedente ⁽²⁾, il risultato ottenuto dall'analisi spettrale di alcune blende di Sardegna, mi ha incoraggiato a proseguire tali ricerche, tanto più che il metodo, per la sua comodità e notevole semplicità, si raccomanda sopra ogni altro per riconoscere quantità, anche piccolissime, di molti elementi rari. Approfittando di parecchi nuovi campioni di blende, che da diversi direttori di miniere vennero inviati al prof. Lovisato, ho voluto anzitutto completare le ricerche già iniziate altre volte sullo stesso minerale, prima di dedicarmi allo studio di altre specie, delle quali mi occuperò quanto prima.

Le analisi quantitative e le ricerche spettroscopiche furono questa volta eseguite su quindici esemplari, che verrò successivamente indicando con numeri progressivi, accompagnando, come feci altra volta, i dati dell'analisi con cenni relativi a qualche carattere fisico del minerale, al suo modo di presentarsi ed alla località donde esso deriva.

Campione n. 1. — Questo insieme ai cinque seguenti, fu inviato al direttore di questo Museo dall'Ing. Emilio Jacob; appartiene alla miniera di « Sos Enatos » (territorio di Lula); presenta la blenda in concentrazioni od in vene quasi pure, non si notano cristalli distinti, ma delle faccie di sfaldatura più o meno estese. Il colore è generalmente grigio rossastro chiaro; rosso giacinto o giallo melato nei frammenti piccoli, quello della polvere è bianco sporco.

Densità a 11°2 = 4,00 Durezza 3,5

Composizione centesimale:

S	32,93
Cu	tracce
Cd	tracce
Fe	1,18
Zn	65,63
	99,74

Campione n. 2. — Deriva dalla stessa miniera « Sos Enatos »; fu preso però in una località diversa da quella del precedente; differisce molto da

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel Museo di Mineralogia e Geologia della R. Università di Cagliari.

⁽²⁾ *Su alcune blende di Sardegna*, Rend. Acc. Lincei, 20 marzo 1904.

questo nell'aspetto, poichè costituisce una massa pressochè compatta di color quasi nero, ed abbastanza pura; è accompagnata soltanto da rare e piccole mosche di calcopirite; la polvere è grigio rossastro chiara.

Densità a 20° = 4,02 Durezza 3,5

Composizione centesimale:

S	33,10
Cu	tracce
Cd	0,91
Fe	6,80
Zn	59,19
	100,00

Campione n. 3. — Proviene dalla località denominata « Mamoina » (Gadoni); il minerale si presenta in piccole vene in mezzo ad una roccia chiara; il colore della massa è nero, quello della polvere rosso scuro.

Densità a 17°,4 = 3,98 Durezza 4

Composizione centesimale:

S	33,39
Cu	0,97
Cd	0,75
Fe	12,05
Mn	tracce
Zn	52,18
	99,34

Campione n. 4. — È il secondo esemplare di Gadoni della concessione *Istrizzu-Talesi*; differisce dal precedente, perchè la sostanza, a grana piuttosto fina, è quasi intimamente mescolata con un roccia verdastro scura ed è spesso unita a pirite e galena; non differisce invece per il colore della massa e della polvere; la durezza non è determinabile.

Densità a 17°,6 = 4,13

Composizione centesimale:

S	32,99
Cu	tracce
Cd	1,23
Fe	7,99
Mn	tracce
Zn	57,38
	99,59

Campione n. 5. — Anche questo è di Gadoni, località « Sa Ruta S' Orroili ». Mostra delle vene più o meno sottili di solfuri misti (blenda, molta galena, pirite e calcopirite) in uno schisto nero che sporca le dita. La purificazione della sostanza ha in questo caso presentato maggiori difficoltà che negli esemplari precedenti. Per tale motivo e per la limitata quantità di blenda contenuta in tutti i pezzi, che sono stati a mia disposizione, non ne ho potuto trar fuori quanta ne sarebbe stata necessaria per le ricerche spettroscopiche, ma solo lo stretto necessario per l'analisi quantitativa. Anche ne' minuti frammenti presenta color nero, la polvere è rosso scura; durezza non determinabile.

Densità a 13°,5 = 3,95

Composizione centesimale:

S	33,77
Cu	tracce
Cd	0,65
Fe	18,05
Mn	tracce
Zn	47,54
	100,01

Campione n. 6. — Proviene da Villaputzu, località « Spilloncargiu » (Sarrabus). La blenda, accompagnata qua e là da mosche di galena, compare in vene in mezzo ad una roccia verdastra oscura. È di color nero e talvolta iridescente nella parte esterna del campione; la polvere è rosso scura; durezza non bene determinabile.

Densità a 12°,5 = 3,97

Composizione centesimale:

S	33,50
Cu	tracce
Cd	"
Bi	"
Fe	13,71
Mn	tracce
Zn	52,03
	99,24

Campione n. 7. — Mandato al Museo dall'ing. Carlo Floris-Thorel con questa indicazione: « Su Suereddu » (territorio di Aritzo). Ad eccezione di qualche piccola vena quasi pura, del resto la blenda è generalmente disseminata nella ganga, comprendente anche minerali di ramé. Il colore della

massa è quasi nero, quello della polvere grigio rossastro chiaro. Non essendosi potuto effettuare una sufficiente purificazione della sostanza, ne è derivato un valore troppo elevato per il ferro, il quale in parte potrebbe provenire anche da sostanze accompagnanti la blenda, poichè il colore dei frammenti puri di questa, e quello della sua polvere escluderebbero che si tratti in questo caso della varietà *marmatite*. La durezza non è determinabile.

Densità a 13°2 = 4,05

Composizione centesimale:

S	33,07
Cd	tracce
Fe	11,94
Mn	1,39
Zn	53,25
	99,65

Campione n. 8. — Inviato dallo stesso ingegnere con la scritta: « Canali Serci » (territorio di Villacidro). È una mescolanza di solfuri, ne' quali la blenda apparisce con grana piuttosto fina e colorata in nero; la polvere rosso scura; durezza non determinabile.

Densità a 11°1 = 4,06

Composizione centesimale:

S	32,73
Cu	tracce
Cd	"
Fe	11,89
Mn	tracce
Zn	54,27
	98,89

Campione n. 9. — Ho creduto necessario esaminare i due campioni di blenda di Rosas, mandati ultimamente dall'ing. Cappa, non solo perchè l'altra volta per mancanza di materiale non potei farne l'esame spettroscopico, ma anche perchè essi provengono da punti diversi della stessa miniera. Questo, che appartiene al giacimento assai complesso detto *Fortuna*, è mescolato alla galena, talvolta con individui cristallini distinti e alquanto sviluppati da ricordare il primo esemplare già esaminato, altre volte i due solfuri son mescolati in una massa a grana più o meno fina. Il colore dei cristalli è nero; la polvere è rossastra chiara.

Densità a $13^{\circ},8 = 4,01$ Durezza 3,5

Composizione centesimale:

S	32,97
Cd	tracce
Fe	4,84
Mn	0,48
Zn	61,71
	100,00

Campione n. 10. — Quest'altro esemplare di Rosas deriva dal giacimento di minerali misti del cantiere Asproni; ancor esso è una miscela di galena e blenda, però in nessun punto del blocco, che ho avuto fra le mani, si presentano cristalli o masse isolate. Per tale motivo la separazione non si è potuta effettuare perfettamente; ma dal piombo trovato nell'analisi ho calcolato la quantità di galena mescolata, e le quantità dei componenti trovate furono riferite al peso della sostanza impiegata meno il solfuro di piombo. Il colore è quasi nero; polvere rossastra chiara.

Densità a $14^{\circ} = 4,01$ Durezza 3,5

Composizione centesimale:

S	32,20
Cd	0,23
Fe	6,97
Mn	tracce
Zn	59,62
	100,02

Campione n. 11. — È un piccolo blocco di minerale quasi puro, donato dal sig. Libois, che l'ha tolto dalla sua miniera di « Mitza Sermentu » presso Rosas. È a grana alquanto minuta e presenta color nero e notevole iridescenza nella superficie esterna. La polvere è di un rosso molto scuro.

Densità a $11^{\circ},8 = 3,94$ Durezza 3,5

Composizione centesimale:

S	33,18
Cu	1,50
Cd	tracce
Fe	11,69
Mn	tracce
Zn	52,50
	98,87

Campione n. 12. — Donato dallo stesso sig. Libois, appartiene al giacimento di antimonio di Genna Gurèu (limiti fra Orroli e Nurri), giacimento interessante per i composti di tungsteno. In alcuni esemplari di quella località si osservano de' piccoli cristalli isolati di blenda, in quello esaminato invece costituiva una piccola massa facilmente purificabile dalla pirite, che l'accompagnava. Però la quantità di sostanza estratta è stata sufficiente soltanto per l'analisi quantitativa. Il color scuro nella massa, divien rosso chiara ne' frammenti piccoli; la polvere è rosso chiara.

Densità a $18^{\circ},8 = 4,03$ Durezza 3,5

Composizione centesimale:

S	32,88
Cu	tracce
Cd	id.
Fe	1,20
Zn	65,71
	99,79

Campione n. 13. — Della località denominata « Sa Barita » fra Fonni e Correboi. Presenta raramente delle mosche di pirite, la maggior parte è a grana fina impastata in una roccia pirossenica; il colorito è nero anche nelle masse sottili, polvere rosso scura.

Densità a $12^{\circ} = 3,98$ Durezza 4

Composizione centesimale:

S	33,17
Cd	0,97
Fe	9,20
Mn	1,34
Zn	55,06
	99,74

Campione n. 14. — Deriva da « Su Porru » medesimamente tra Fonni e Correboi; il suo aspetto ricorda la blenda di Riu Planu Castangias esaminata altra volta, che si dimostrò relativamente ricca di indio. Il colore è nero, la polvere rosso bruna.

Densità a $26^{\circ} = 3,99$ Durezza 4

Composizione centesimale:

S	33,30
Pb	} tracce
Cd	
Bi	
Fe	10,12
Mn	5,81
Zn	50,75
	99,98

Campione n. 15. — Appartiene al giacimento argentifero, ora esaurito di Correboi. È mescolata a molta galena, pirite e piccole quantità di calcopirite e presenta la fluorina, ganga caratteristica dei filoni argentiferi. Raramente si notano delle vene di sostanza pura, che è generalmente a grana fina e di color nero. La polvere è rosso scura; durezza non determinabile.

Densità a 14°,2 = 3,89

Composizione centesimale:

S	33,46
Pb	} tracce
Cu	
Cd	1,66
Fe	12,17
Mn	tracce
Zn	52,02
	99,31

Per questi tre ultimi campioni il prof. Lovisato va riconoscendo al cav. Giuseppino Moro, ex-sindaco di Fonni, ed al sig. Michele Cicalò Carboni, che furono così gentili d'andare in quei tre punti, di raccoglierne una certa quantità e di inviargliela, non avendo egli che frammenti delle blende di quelle tre località.

Esame spettroscopico.

Queste ricerche furono eseguite con lo stesso apparecchio e con lo stesso metodo descritto nella Nota precedente, e già ricordata; dapprima furono sperimentate soluzioni di circa due grammi di sostanza. In 13 campioni furono constatate soltanto le righe appartenenti agli elementi trovati; in due soltanto, cioè nella blenda di « Su Porru » (n. 14) e di Correboi (n. 15) si osservò la riga un po' debole dell'indio. Preparate le soluzioni con quantità molto maggiori di sostanza, si ottennero i risultati indicati nel seguente quadro dove ogni riga è rappresentata dalla corrispondente divisione della scala, ed in ogni colonna comprendente quella data riga trovasi il simbolo del metallo, al quale essa appartiene.

Simboli dei metalli e righe corrispondenti

sostanza adoperata		H	Cd	Zn	Cu	Cu	Fe	Fe	Cu	Cu	Cd	Cu	Cu	Cu	Cu	Cu	Cu	Zn	Cd	Bi	Zn	Zn	Cu	Cu	Fe	Fe	Ga	In	Ga				
1	gr. 23	75	83	88	(1)	—	142	152	216	220	232	237	240	242	—	—	—	—	305	307	—	330	312	—	395	—	—	—	564	619	670		
2	33	"	"	"	104	114	"	"	"	"	"	—	—	260	272	285	295	"	"	—	—	"	382	nd	422	462	—	492	"	rd	"		
3	12	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	—	—	—	"	"	"	—	"	"	—	—	—	—	—	—	—	—		
4	25	"	"	"	—	—	—	—	—	—	—	"	"	"	—	—	—	"	"	—	—	"	—	—	—	—	—	—	—	—	—		
6	20	"	"	"	"	—	"	"	"	"	"	—	—	—	—	—	—	"	"	316	"	"	—	nd	—	—	—	—	—	—	—	—	
7	30	"	"	"	—	—	"	"	—	"	"	—	—	—	—	—	—	"	"	—	—	"	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
8	30	"	"	"	—	—	"	—	"	—	—	"	"	"	—	—	—	"	"	—	—	"	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
9	30	"	"	"	—	—	—	—	"	—	—	"	—	—	—	—	—	"	"	—	—	"	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
10	20	"	"	"	"	—	"	"	—	—	—	—	—	—	—	—	—	"	"	—	—	"	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
11	23	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	—	—	"	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
13	35	"	"	"	—	—	—	"	"	—	—	—	—	—	—	—	—	"	"	—	—	"	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
14	30	"	"	"	—	—	—	"	"	—	—	—	—	—	—	—	—	"	"	—	—	"	—	nd	—	—	—	—	—	—	—	—	—
15	16	"	"	"	—	—	"	"	"	"	"	"	—	—	—	—	—	"	"	—	—	"	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

(1) Il segno (—) indica che la riga manca, oppure è così debole da non potersi constatare con certezza; il segno (s) significa la presenza della riga, della quale, per brevità, si è solo una volta indicata la corrispondente divisione della scala; infine la lettera d vuol dire riga debole e il punto (.) riga brillante. Di queste ultime indicazioni si è fatto uso soltanto per le righe dell'indio.

Dai risultati ottenuti rimane sempre confermata la presenza costante del cadmio nelle blende sarde, altrettanto non può dirsi per il rame, sebbene questo vi appaia assai spesso. Questa volta ho trovato molti esemplari (3, 5, 6, 8, 11, 14, 15) che contengono una quantità di ferro superiore al 10 % e costituiscono perciò la varietà *Marmatite*. Fra questi si distingue il campione 14 per la ricchezza in manganese, che, a quanto io sappia, nessuna blenda ha finora dimostrato in tale quantità. Due campioni (6 e 14) contengono anche tracce di bismuto, molto più sensibili nel primo, in cui, dirò più giustamente, ne son contenute piccole quantità, che avrei determinato, se avessi avuto a mia disposizione maggior quantità di sostanza. Consultando le analisi pubblicate dall'Hintze, trovo che soltanto una, la blenda di Joachimsthal, analizzata da Meyer, ha accusato presenza di tracce di bismuto ⁽¹⁾. Riguardo agli elementi rari, che generalmente accompagnano le blende, risulta che soltanto in due campioni (1 e 2) sono contemporaneamente contenuti l'indio e il gallio, mentre più frequentemente si riscontra il solo indio, poichè, oltre che in questi esemplari, lo si è notato anche in altri sei (6, 7, 8, 13, 14, 15). Gli ultimi due (14 e 15) lo manifestano anche in poca quantità di sostanza, perciò in uno di essi (14) ne determinai la quantità che ammonta al 0,0243 %. Per il secondo non mi sembrò necessario ripetere questa operazione perchè l'intensità della riga α dell'indio, in quantità non molto diversa di sostanza (circa due grammi), non appare più intensa di quella manifestata dall'altro esemplare.

Desidero esprimere di nuovo la mia riconoscenza verso il prof. Lovisato per i suoi consigli e per il materiale gentilmente messo a mia disposizione.

Mineralogia. — *La Centrolite nel giacimento cuprifero di Bena (d)e Padru presso Ozieri (Sassari).* Nota di DOMENICO LOVISATO, presentata dal Socio G. STRUEVER.

Ritorno per la terza volta sopra l'interessante giacimento cuprifero di Bena (d)e Padru presso Ozieri, che ha regalato alla scienza insieme a molti minerali di rame la *Mimetite*, la *Vanadinite*, la *Descloizite* e la *Stolzite* ⁽²⁾, specie che non si conoscevano ancora non solo per altre località dell'isola bella, ma neppure per tutta Italia, per segnalare qualche cosa di nuovo.

⁽¹⁾ Hintze, Handbuch der Mineralogie. Vierte Lieferung, § 592-594, 1900.

⁽²⁾ Non posso a meno di qui ricordare, che la *Stolzite*, questa rarissima specie minerale isolana, ha avuto recentemente una splendida illustrazione cristallografica dal chiarissimo collega prof. Artini, che nei Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Sc. e Lett., serie II, vol. XXXVIII, 1905, pagg. 573-8, descrive i rari cristalli e frammenti di cristalli, che a lui aveva inviato per lo studio.

Esaminando il materiale quarzoso inviatomi da lassù e derivante dalla galleria scavata per cinque metri rimpetto alla prima, quindi anch'essa perpendicolare alla principale e che come ricordai nella mia seconda Nota (¹), mi offerse anche da questa parte la *Mimetite*, vidi sopra qualche campione di quel quarzo, generalmente decomposto, dei gruppetti cristallini, a struttura zonata, formanti quasi delle sferuletto, di una sostanza bruno-rossastra o quasi nera, dalla polvere color cioccolata, che mi fece pensare subito alla *pirolusite*, così frequente in Sardegna, od a qualche altro composto del manganese. Queste sferuletto sono isolate, più raramente aggruppate in modo da dare dei piccoli aggregati, nei quali allora nella frattura od in qualche sfaldatura si osserva la lucentezza submetallica, che nelle sferuletto isolate non compare punto, essendo come appannate: in qualche aggruppamento si scorge l'intreccio di parti cristalline.

La perla col borace mi confermò nella sostanza la presenza del manganese, ma sul carbone, oltre la facile fusibilità, vidi netta l'aureola gialla dell'ossido di piombo, e successivamente potei constatare anche la presenza del ferro. Ma non avendo che pochissima sostanza a mia disposizione, passai alla rottura dei pezzi di roccia quarzosa inviatimi e potei ottenere sufficiente quantità da procedere alla sua analisi quantitativa, che al dott. Rimatori su quasi mezzo grammo di sostanza, purificata meglio che si è potuto, ha dato:

SiO ₂	17,71
PbO	60,02
CuO	traccie
Fe ₂ O ₃	1,55
MnO ₂	18,87
CaO	0,33
MgO	traccie
H ₂ O	1,79
	100,27

Quest'analisi avvicinandosi molto a quella data dal Dana (²) e che qui riporto:

SiO ₂	17,68
Mn ₂ O ₃	16,59
Fe ₂ O ₃	5,58
PbO	55,72
MnO	3,05
CaO	0,91
	99,53

(¹) *Vanadinite, Descloizite, Mimetite e Stolzite della miniera cuprifera di Bena (d) e Padru presso Ozieri (Sassari)*. Rend. R. Acc. dei Lincei, vol. XIII, 2° sem., serie 5^a, fasc. 1°, 1904, pag. 50.

(²) *A System of Mineralogy*, pag. 1039.

ci dice che la nostra sostanza è una varietà di *Centrolite*, silicato di piombo e manganese di Långban in Isvezia. Non possedendo il Museo di Mineralogia, da me diretto, un campione minerale di quella specie e di quella località, volli acquistarlo, sebbene sapessi che lassù era la *Centrolite* mescolata intimamente con braunite, richterite in barite. Ma, se oggi il Museo di Mineralogia di Cagliari possiede un esemplare di più, la nostra *Centrolite* nulla ha da vedere pel suo modo di presentarsi colla specie svedese, sempre cristallizzata e sempre lucentissima.

L'Hintze non può riportare l'analisi data superiormente ed eseguita dal Flink, uno dei più noti e benemeriti mineralisti della Svezia, per la ragione che il 3° fascicolo della sua opera ⁽¹⁾, che comprende la *Centrolite*, fu chiuso nell'agosto 1890, mentre il lavoro di Flink ⁽²⁾ fu presentato da Brögger all'Accademia di Stoccolma solo il 20 novembre 1890 e pubblicato nel 1891; riporta invece semplicemente quella della prima *Centrolite* ⁽³⁾, che faceva parte di una collezione di minerali venuti in Germania dalla parte meridionale del Chili, quindi di località non sicura, determinata dal vom Rath fino dal 1880 ed analizzata dal Damour ⁽⁴⁾ e che sarebbe:

SiO ₂	15,95
MnO ₂	24,50
PbO	59,79
	100,24

Certamente la *Centrolite* sarda per la sua composizione s'avvicina più alla specie svedese che alla primitiva tipica del Chili, alla quale però poi pochi cenni, che si hanno, forse rassomiglia di più esteriormente, sembrando essere anche quella su ganga di quarzo.

La durezza, che è data per la *Centrolite* in 5, è assai più bassa per la nostra di Sardegna, che non arriva al 4° grado, per essere scalfito dalla fluorina. Anche il peso specifico n'è inferiore, essendosi ottenuto solo 5,34 alla temperatura di 16,3°: però devo osservare che la sostanza esaminata era impura, perchè inquinata di quarzo; ed essendo questa impurità eguale a 3,37 % ed attribuendo al quarzo il peso specifico di 2,66 e facendo le correzioni dovute, arriviamo a 5,43 circa, valore, che, anche tenendo conto della quantità d'acqua trovata nella composizione della nostra in 1,79, è

(1) Handbuch der Mineralogie. Zweiter Band. Silicate und Titanate. 1889-1897.

(2) G. Flink, Mineralogische Notizen III, z. Kentrolith von Långbanshyttan. Bihangtill K. svenska vet. akad. handlingar. Band. 16. Afd. II. 2° 4. pagg. 14-20. Stockholm 1891. Vedi anche relazione estesa in Groth, Zeitschrift. Bd. XX. pag. 370. 1892.

(3) Opera citata, pag. 407.

(4) A. Damour und G. vom Rath, Ueber den Kentrolith, eine neue Mineralspecies, in Groth, Zeitschrift. Bd. V. Heft 1, pag. 32. 1880.

troppo basso per una *Centrolite*, per la quale Dana ed Hintze danno 6,19 per la specie americana, tacendosi dal Dana il peso specifico per la provenienza svedese, per la quale il Flink dà 6,068 offrendo la durezza = 5.

Nel tubo chiuso si vede un leggero appannamento, senza però formazione di gocce d'acqua. Sul carbone fonde facilmente in vetro nero, dapprima bolle, si gonfia, ma cessato il bollore si restringe in globulo nero, vedendosi chiaramente l'aureola gialla dell'ossido di piombo: attorno all'aureola gialla v'è un'aureola bianca. Schiacciando in un mortaino il globuletto, ottenuto alla fiamma riducente, si vedono striscie di piombo metallico, che si ottiene più facilmente colla soda sul carbone. Col borace la perla è rossastra a caldo, violetta a freddo. Col sal di fosforo la perla è giallognola a caldo e bianca a freddo, mostrandosi solo la reazione del ferro, però con un residuo bianco non fuso, che è la silice: col nitro la perla diviene violetta, ma opaca; arroventandola fortemente perde il violetto, diviene gialla a caldo e verdastra a freddo, quando si sia adoperato molto nitro; con poco nitro invece la perla è gialla a caldo e bianca a freddo.

Nell'acido nitrico concentrato si scioglie in parte, dando una soluzione nera con separazione d'ossido di manganese e silice: coll'acido cloridrico, particolarmente a caldo, si mette in libertà del cloro, che si vede e si sente.

Pei caratteri chimici si accorda la nostra sostanza colla *Centrolite* del Chili; ne differisce alquanto da questa e da quella di Svezia pel modo di presentarsi, per la durezza, pel peso specifico, e nella composizione chimica per essere la nostra più ricca in piombo e più povera in ferro ed in calce, oltrechè per contenere dell'acqua e tracce di magnesia.

Chimica. — *Trasformazioni dei nitrosopirroli* ⁽¹⁾. Nota di FRANCESCO ANGELICO, presentata dal Corrispondente A. ANGELI.

Per completare le ricerche, iniziate tre anni or sono col prof. Angeli ⁽²⁾, sull'azione dell'idrossilammina sui nitrosopirroli, ho creduto opportuno studiare il comportamento, rispetto a questo reattivo dei nitrosoderivati del pirrolo, metilfenilpirrolo, difenilpirrolo e trifenilpirrolo, allo scopo di chiarire la struttura del nitrosopirrollo e di determinare l'influenza esercitata sulla stabilità dell'anello pirrolico dalla posizione e dalla natura dei radicali sostituenti.

Nitrosopirrolo.

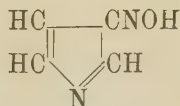
Al nitrosopirrolo preparato sei anni or sono ⁽³⁾, per azione del nitrito

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica farmaceutica della R. Università di Palermo.

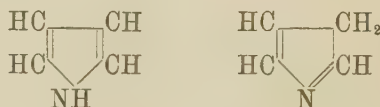
(2) Angeli, Angelico e Calvello, Accad. Lincei 1902, vol. XI, 2° semestre, pag. 16.

(3) Angeli e Spica, Gazz. chim. 29-I-500 (1899). — Spica Angelico, Gazz. chim. 29, II, 49 (1899).

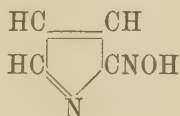
d'amile sul pirrolo in presenza di etilato sodico fu assegnata fin d'allora la struttura:



giacchè non era improbabile che l'isonitrosopirrolo derivasse da una forma tautomera del pirrolo



analogamente a quanto si era osservato per gl'indoli aventi libero il posto in β . Però se questo può ammettersi nel caso di pirroli o d'indoli sostituiti in α , non può escludersi, che, nel caso del pirrolo, in cui tutti i posti sono liberi, l'idrogeno imminico concorra alla formazione del metilene nel posto α e di conseguenza al nitrosopirrolo potrebbe anche spettare la struttura



Per decidere a quali dei due schemi fosse da dare la preferenza, venne studiata l'azione dell'idrossilammina. Infatti dalla prima formula era da aspettarsi una triossima, dalla seconda una diossima o loro derivati. L'esperienza ha confermate le previsioni giacchè trattando con idrossilammina la soluzione alcalina del nitrosopirrolo si arriva ad un composto che contiene tre atomi di azoto e che differisce dalla triossima



per una molecola di acqua in meno.

Questo fatto si verifica anche in altri casi come si vedrà in seguito.

La soluzione acquosa ed alcalina si tratta con eccesso di idrossilammina, si lascia in riposo alcune ore e quando il liquido non si scolora ulteriormente si distilla nel vuoto fino a secchezza.

Il residuo mescolato con bicarbonato di sodio viene estratto ripetutamente con acetone ed evaporando il solvente rimane indietro una massa bruna che cristallizzata più volte dall'acqua, in presenza di nero animale, fornisce aghetti bianchi splendenti che fondono decomponendosi a $248^\circ\text{--}250^\circ$.

Per la formula $C_4 H_5 N_3 O_2$.

Trovato	C	37,72	H	4,42	N	32,80	32,84	32,76
Calcolato	C	37,80	H	3,92	N	33,07		

Bollita con acido solforico diluito cede idrossilammina.

β -nitrosometilfenilpirrolo.

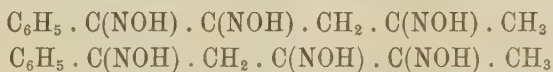
Si operò in maniera analoga, cioè trattando la soluzione acquosa alcalina del nitrosometilfenilpirrolo con forte eccesso d'idrossilammina.

Il liquido dapprima bruno, e dopo un paio di giorni quasi del tutto scolorato, per trattamento con acido acetico separa la triossima che, cristallizzata dall'alcool, si presenta in minuti aghetti bianchi che fondono con decomposizione a 205° .

Per la formula $C_{11} H_{13} N_3 O_3$.

Trovato	C	56,22	H	5,80	N	17,60
Calcolato	C	56,17	H	5,53	N	17,87

Per questa triossima sono possibili due formule diverse, a seconda che l'isonitrosogruppo va dalla parte del fenile o del metile, e precisamente



Di fronte ai reattivi si comporta in maniera del tutto analoga alla triossima proveniente dal nitrosodimetilpirrolo (¹). Come questa, fornisce un tribenzoilderivato che, purificato dall'alcool, si ha in minuti cristalli che fondono a 156° .

Azoto per $C_{32} H_{25} N_3 O_6$, trovato 7,60 calcolato 7,67,

e per breve riscaldamento con acido solforico diluito dà un prodotto che differisce dalla triossima per una molecola d'idrossilammina in meno.

Azoto per $C_{11} H_{10} N_2 O_2$, trovato 13,70, calcolato 13,86.

La nuova sostanza cristallizza dal benzolo e si ottiene in laminette colorate lievemente in giallo che fondono a 170° , solubili negli alcali, e per azione del cloruro di benzoile col metodo di Baumann e Schotten fornisce un monobenzoilderivato che dall'alcool si separa in minuti cristalli bianchi. Fonde a 158° - 159° .

Azoto per $C_{18} H_{14} N_2 O_3$, trovato 9,28 calcolato 9,15.

(¹) Angelico e Calvello, Gazz. chim., vol. 34, p. I, pag. 38.

Sottoposta a prolungata azione dell'acido solforico diluito, elimina ulteriormente idrossilammina dando origine ad un composto di natura chetonica che cristallizza dall'alcool in fogliette bianche, che fondono a 105°.

Azoto per $C_{11}H_9NO_2$, trovato 7,66 calcolato 7,56.

La soluzione acetica trattata con acetato di p-nitrofenilidrazina fornisce il corrispondente idrazone, che cristallizzato dall'alcool si presenta in minuti aghetti intensamente colorati in giallo i quali fondono con decomposizione verso 200°.

Azoto per $C_{17}H_{14}N_4O_3$, trovato 17,90 calcolato 17,38.

La triossima riscaldata a lungo con acqua dà origine ad un liquido colorato in bruno che per raffreddamento solidifica. Depurandolo dall'etere del petrolio si ha in piccoli cristalli prismatici che fondono a 88° e che differiscono dalla triossima per una molecola di acqua in meno.

Azoto per $C_{11}H_{11}N_3O_2$, trovato 19,60 calcolato 19,35.

Questa nuova sostanza, per riscaldamento con acido solforico diluito, a sua volta cede idrossilammina, dando un chetone che cristallizzato anch'esso dall'etere del petrolio si presenta in lunghi aghi bianchi che fondono a 95°.

Azoto per $C_{11}H_{10}N_2O_2$, trovato 13,90 calcolato 13,86.

Trattato con p-nitrofenilidrazina, in soluzione acetica, dà il corrispondente idrazone che dall'alcool si separa in sottili aghetti fortemente colorati in giallo e che fondono decomponendosi verso 202°.

Azoto per $C_{17}H_{15}N_5O_3$, trovato 21,20 calcolato 20,77.

β-nitrosodifenilpirrolo.

Questa sostanza fu sottoposta ad analogo trattamento; però la reazione in questo caso procede più lenta ed assieme ad un derivato che differisce dalla triossima per una molecola di acqua in meno, si ottengono altri due corpi, insolubili negli alcali e molto caratteristici. Data la scarsezza del materiale, non è stato possibile studiarli; solo accennerò al fatto che uno è molto solubile in alcool, dal quale solvente si separa in cristalli rossi che sembrano rubini, l'altro meno solubile è giallo, però per sfregamento, o per prolungata ebullizione con alcool, passa in soluzione e concentrando si separa in cristalli rossi simili ai precedenti.

Il derivato anidrico della triossima purificato dal benzolo fornisce bellissimi cristalli rombici lievemente colorati in giallo. (Fonde a 141°-142°).

Azoto per $C_{16}H_{13}N_3O_2$, trovato 15,10 calcolato 15,05.

Dà un monobenzoilderivato che dall'etere petrolico si separa in minuti cristalli bianchi. Fonde a 123°.

Azoto per $C_{23}H_{17}N_3O_3$ trovato 11,10 calcolato 10,99.

Per trattamento a caldo con acido solforico diluito, il derivato della triossima perde idrossilammina dando origine ad un prodotto, probabilmente di natura chetonica, che non ho potuto analizzare per deficienza di sostanza.

β-nitrosotrifetilpirrolo.

Il β-nitrosotrifetilpirrolo per azione dell'idrossilammina a freddo rimane inalterato; se però si pone a ricadere in soluzione acquosa alcoolica, in presenza di alcali, dopo circa un paio di ore il liquido rosso bruno appare scolorato, mentre si separa una sostanza bianca fioccosa che non è altro che amminotrifetilpirrolo.

Il liquido filtrato ed acidificato con acido acetico dà una piccola quantità di sostanza gialla, molto alterabile, e della quale non è stato possibile occuparmi.

Allo stesso amminoderivato si arriva riducendo il nitrosotrifetilpirrolo con polvere di zinco ed acido acetico.

Da ciò ne segue che l'idrossilammina in questo caso agisce soltanto da riducente. Il prodotto si ottiene, cristallizzato dal benzolo, in sottilissimi aghetti bianchi che fondono a 184°-185°.

Per la formula $C_{22}H_{18}N_2$.

Trovato	C 85,55	H 6,38	N 9,13
Calcolato	C 85,20	H 5,80	N 9,03

L'amminotrifetilpirrolo, sciolto in piridina, addizionato della quantità teorica di cloruro di benzoile, dà un monobenzoilderivato che purificato dal benzolo si ha in minuti cristalli che fondono con decomposizione a 123°.

Azoto per $C_{29}H_{22}N_2O$, trovato 6,72 calcolato 6,76.

Trattato con cianato di potassio fornisce la corrispondente urea che cristallizzata, dall'alcool fonde decomponendosi a 238°.

Azoto per $C_{23}H_{19}N_3O$, trovato 11,90 calcolato 11,90.

Dal comportamento dei nitrosopirroli sostituiti si osserva chiaramente che l'introduzione di radicali fenilici ritarda od ostacola l'idrolisi dell'anello pirrolico, ma d'altra parte la presenza dell'isonitrosogruppo favorisce l'apertura dell'anello; infatti il prof. Ciamician ⁽¹⁾ avendo, molti anni or sono, sottoposto ad analogo trattamento i corrispondenti pirroli liberi, trovò che dal metilfenilpirrolo si hanno soltanto piccole quantità della diossima, mentre il difenilpirrolo ed il trifetilpirrolo rimangono inalterati.

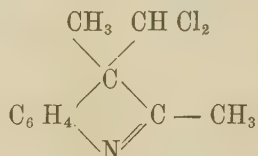
Continuerò lo studio di queste interessanti sostanze.

⁽¹⁾ Ciamician, Gazz. chim., vol. 21, p. I, pag. 245.

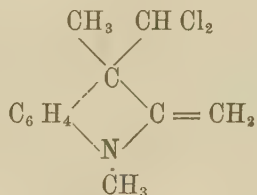
Chimica. — *Azione del cloroformio sull' α - β -N trimetilindolo.*
Nota di G. PLANCHER ed O. CARRASCO ⁽¹⁾, presentata dal Socio
G. CIAMICIAN.

Le Note pubblicate da uno di noi con G. Testoni, ed alcune altre nostre ⁽²⁾, oltre a chiarire il meccanismo della trasformazione dei nuclei pirrolici in nuclei piridici, hanno messo in evidenza che il cloroformio, in una prima fase, reagisce perfettamente come i joduri alcoolici, sugli indoli.

In una Nota precedente facendo agire il cloroformio sull' α - β -dimetilindolo, ottenemmo la α - β -dimetil- β -diclorometilindolenina ⁽³⁾:



e da questa con joduro di metile il jodometilato corrispondente vale a dire il jodidrato della β -N-dimetil- β -diclorometil- α -metilenindolina.



Con perfetta corrispondenza colla trasformazione della β - β - α -trimetilindolenina nella β - β -N-trimetil- α -metilenindolina ⁽⁴⁾.

Per completare l'analogia, restava a vedere, ciò che ancora non è stato fatto, come si comporta il cloroformio cogli indoli terziarî.

È noto che il joduro di metile reagisce a temperatura ordinaria col trimetilindolo e lo trasforma nella trimetilmethilenindolina suddetta ⁽⁵⁾ e che ana-

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica agraria della R. Università di Bologna.

⁽²⁾ G. Plancher, Questi Rendiconti vol. IX, 1° sem., pag. 121; Idem, Ibid. IX, 1° sem. 222; Idem e G. Testoni, Ibid. X, 1° sem. 308; Idem e O. Carrasco, Ibid. XIII, 1° sem., pag. 573.

⁽³⁾ G. Plancher e O. Carrasco, ibid. XIII, 1° sem., pag. 574, 636, e XIV, 1° sem., 162-165.

⁽⁴⁾ Gazz. chim. it. 28-b-428.

⁽⁵⁾ Ciamician e Boeris, Questi Rendiconti

logamente reagiscono il joduro di metile e di isopropile sullo stesso indolo, nonchè il joduro di metile sul β -N-dimetil- α -etilindolo (1).

In base alla analogia anzidetta il cloroformio cogli indoli terziari, pur essendogli preclusa la via all'ulteriore trasformazione nelle clorochinoline corrispondenti doveva dare delle diclorometilmetilendoline, e nel caso speciale del trimetilindolo quella diclorometildimetil- α -metilenindolina di cui si ottenne il jodidrato nel modo anzidetto.

La esperienza ha dato risultati corrispondenti alle nostre speranze, e di ciò appunto tratta questa Nota.

Azione del cloroformio sul trimetilindolo.

β -diclorometil- α -metilen- β -N-dimetilindolina.

10 grammi di trimetilindolo, sciolti in una soluzione di etilato sodico preparata con 2 gr. di sodio e 50 gr. di alcool assoluto, vennero trattati con 20 gr. di cloroformio secco, a goccia a goccia evitando assolutamente che la temperatura salisse oltre i 50° o discendesse sotto ai 40°. Si separò a poco a poco un abbondante precipitato di cloruro di sodio. Terminata la reazione si scacciò a bagno maria il cloroformio e l'alcool. Intanto la massa venne colorandosi sempre più in verde.

La massa residua fu estratta rapidamente con acido cloridrico al 5%, sbattuta con etere, ed il cloridrato, dopo averne scacciato completamente l'etere e dopo filtrato venne decomposto con soda. Si liberò una base liquida che venne estratta con etere di petrolio, e distillata in corrente di vapore.

Questa base resta per distillazione dell'etere come un olio che arrossa all'aria. Il rendimento è scarso. Data anche la alterabilità di questa base, rinunciammo ad analizzarla.

Per determinare la composizione ne facemmo il picrato.

La base greggia trattata con soluzione alcoolica satura di acido picrico depone un picrato pastoso e nerastro, che a poco a poco va solidificando e può essere ridotto in polvere.

Cristallizzato dall'alcool assoluto, le prime volte si separa oleoso e bruno, in seguito si separa cristallino in aghetti di colore giallo intenso, che alla fine fondono costanti a 146°-147°.

Analisi:

gr. 0,1520 di sostanza diedero gr. 0,2567 di CO₂ e gr. 0,0507 di H₂O

$C_{12}H_{13}NCl_2 \cdot C_6H_2(NO_2)_3OH = C_{18}H_{16}N_4O_7Cl_2$		
Calcolato %	C 45,86	H 3,40.
Trovato %	C 46,06	H 3,73.

(1) Ciamician e Boeris, Gazz. chim. it. 27- α -83; G. Plancher, Questi Rendiconti XI, 2° sem., pag. 183 e 185.

Questa analisi conferma che la formola che spetta alla diclorobase ottenuta è $C_{12}H_{13}NCl_2$; che essa sia identica con quella ottenuta per l'altra via anzidetta lo provammo trasformandola in jodidrato, che risultò infatti identico al jodometilato di β -diclorometil- α - β -dimetilindolenina.

Infatti liberata la base dal picrato e seccatala in soluzione eterea, la sottoponemmo ad una corrente secca di acido jodidrico. Si separò tosto un jodidrato cristallino ed incolore che fu tosto separato e ricristalizzato dall'alcool assoluto. Si ottenne in fine fondente con decomposizione a 220° - 221° come quello già descritto ⁽¹⁾. Tutti e due si colorano con eguale facilità in rosso dapprima e quindi in bleu.

Chimica. — *Sulle combinazioni della β -fenilidrossilammina colle aldeidi aromatiche.* Nota di G. PLANCHER e G. PICCININI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Esperienze fatte sopra di un orang-utang colla rarefazione dell'aria* ⁽²⁾. Nota del dott. ALBERTO AGGAZZOTTI, presentata dal Socio A. MOSO.

In questa e nelle seguenti Note riferisco gli studi che feci sopra un orang-utang che teniamo nel Laboratorio di fisiologia a Torino e che fu regalato al prof. Mosso l'estate scorsa dal conte Mario Peracca. Questo orang-utang che proviene dall'Isola di Borneo, è un maschio di soli tre anni e mezzo.

Nel mese di gennaio, quando incominciai le esperienze, esso pesava kg. 10.200, dopo quattro mesi è aumentato di due chilogrammi circa. È un animale di indole buonissima ed intelligente, così che potemmo fare su di lui molte esperienze. Soltanto le prime volte che volemmo metterlo sotto alla campana pneumatica od applicargli apparecchi registratori, incontrammo una certa difficoltà; si ribellava, voleva sfuggirci e cercava con tutte quattro le mani il modo di strappare e di rompere gli apparecchi; ma quando si rese conto di ciò che gli si faceva, non si oppose più, anzi esso stesso facilitava l'applicazione degli strumenti, alzando, per esempio, le braccia quando volevamo passare il nastro del pneumografo sotto le ascelle attorno al torace. Preso

⁽¹⁾ G. Plancher e O. Carrasco, Questi Rendiconti XIV, 1° sem. 164, (in detta Nota per errore di stampa si legge « fogliette » invece che « pagliette »).

⁽²⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Torino.

sulle ginocchia rimaneva per delle ore tranquillo e immobile, e spesso finiva per addormentarsi.

La domesticità di questo animale è così grande, che sempre vorrebbe essere in compagnia di qualcuno e a malincuore si assoggetta a rimanere



FIG. 1.

solo colle altre scimmie. Quando entro nella sua stalla, subito viene incontro e si arrampica su per le gambe in modo che io lo prenda in braccio e mi accarezza, nel suo viso vi si vede la contentezza, spesso allungando le labbra in atto di baciare, ed emette un suono speciale che però io non sono capace

di distinguere da quelli che emette quando invece è contrariato o quando soffre.

Per studiare l'azione dell'aria rarefatta su questo orang-utang, lo mettevo sotto una grande campana di vetro alta 52 centimetri e larga 38: affinché l'animale potesse starvi più comodamente, la campana non appoggiava su un piano, ma sul bordo di un cilindro di ghisa incavato. Questo cilindro di ghisa essendo profondo 21 cm., l'altezza complessiva della campana si può ritenere di 73 cm., e la sua capacità è tale da permettere all'orang-utang di essere libero in ogni movimento.

Una doppia pompa mossa da un motore elettrico aspira aria dalla parte alta della campana producendovi la rarefazione: questa può essere regolata, manovrando un robinetto applicato sul fondo del cilindro di ghisa, cioè aumentando più o meno la corrente d'aria che entra nella campana, mentre le pompe funzionano. Essendo le pompe molto potenti, questa corrente d'aria rimane sufficientemente forte per mantenere l'aria pura anche nelle più forti rarefazioni.

Per conoscere i mutamenti della pressione, la campana sta in comunicazione con un manometro.

La maggior parte delle esperienze furono fatte al mattino e quando l'orang-utang era ancora a digiuno. La stanza dove esse si facevano veniva appositamente riscaldata a 18°-20°, e nelle giornate più fredde riscaldavo anche l'aria che entrava sotto alla campana, essendo l'animale molto sensibile al freddo.

Nelle prime esperienze, volli studiare l'azione delle deboli rarefazioni, perciò in esse non sorpassai i 450 mm. di pressione. Sino a questo limite l'animale mostrò di non risentirsi affatto dell'aria rarefatta, e durante tutta l'esperienza rimaneva tranquillo, generalmente seduto, osservando attentamente ciò che si faceva intorno a lui, talora raccoglieva colle unghie le briciole di grasso rimaste aderenti al bordo della campana e le mangiava. L'unico fenomeno che potei osservare, fu lo sbadiglio che compariva ripetutamente durante l'esperienza: la pressione di 660 mm. era già sufficiente a provocarlo. L'orang-utang non soffriva durante la ricompressione per ritornare alla pressione normale, purchè la pressione non aumentasse più di 70-80 mm. Hg. al minuto primo. Se la ricompressione era più rapida vi era un accenno di dolore alle orecchie, perchè lo si vedeva introdurre nel condotto uditivo esterno un dito ed agitarlo rapidamente. Le altre scimmie sono molto più sensibili ai cambiamenti di pressione e, anche quando questa aumenta non molto rapidamente, spesso danno di cozzo contro alle pareti della campana e hanno convulsioni. Ciò indica che nell'orang-utang più facilmente si ristabilisce l'equilibrio tra l'orecchio medio e l'esterno, oppure che l'orang-utang, come l'uomo, sa meglio approfittare della deglutizione, per aprire la tromba d'Eustachio e far comunicare l'orecchio medio colla cavità faringea e quindi coll'esterno.

L'orang-utang nella pressione di 450 mm. diveniva più tranquillo, il suo sguardo si faceva meno vivo, talora triste e tutta la fisionomia assumeva un certo che di apatico e di malinconico. Solo alla pressione di 340 mm. circa si può dire che incominciassero i veri sintomi di malessere: l'orang-utang diventava sonnolento, le palpebre gli cadevano sugli occhi, l'aspetto era instupidito, non si interessava più di ciò che avveniva intorno a lui e prima che la rarefazione scendesse a 300 mm. s'addormentava. Se la pressione non subiva più cambiamenti, esso rimaneva in questo stato di torpore profondo, solo si svegliava se si chiamava la sua attenzione battendo contro alla campana, allora guardava come inebetito, e poi di nuovo si riaddormentava.

Quando compare il sonno, non solo l'attività psichica, ma anche il sistema muscolare si trova in uno stato di depressione evidente. L'orang-utang si mostra spossato e privo di forze, assume una posa caratteristica in cui è massimo il rilasciamento muscolare, sta seduto, curvo sul tronco, le braccia incrociate sulle ginocchia, la testa inclinata in avanti spesso non può più reggersi e deve appoggiarsi alle pareti della campana. I movimenti sono lenti e tremolanti, le braccia sollevate ricadono come paretiche.

Se la rarefazione aumenta oltre 300 mm. il sonno diventa più profondo e non si riesce a svegliare l'orang-utang percuotendo contro la campana. La respirazione diventa dispnoica e stentata, la bocca rimane sempre aperta, le narici fanno dei movimenti ritmici col respiro, la fisionomia è sofferente.

Alcune volte può superare la rarefazione di mezza atmosfera senza addormentarsi, diventa bensì sonnolento e le palpebre di tanto in tanto gli cadono sugli occhi, ma sembra non possa prender sonno, è in continua agitazione, non può tenere una posizione fissa, allunga le labbra, deglutisce, fa smorfie, si lamenta e piange. L'orang-utan in questi casi è tormentato dalla nausea, infatti quanto presenta questa sintomatologia esso finisce per vomitare. Sopra una trentina di esperienze in cui sottomisi l'orang-utang alla rarefazione dell'aria, soltanto due volte ebbi questo quadro e l'animale vomitò una volta alla pressione di 312 mm., e un'altra volta alla pressione di 270 mm.

In alcune esperienze ho spinto la rarefazione fino a 270 mm., ma a questa forte rarefazione, corrispondente ad un'altezza di 8253 metri, l'orang-utang era tanto sofferente da far temere per la vita. A questa pressione l'animale cade sul fondo della campana privo di sensi, più non reagisce agli stimoli acustici che si possono fare dall'esterno percuotendo contro alla campana. La respirazione diventa ancor più difficile e stentata.

Le modificazioni del respiro cominciano alla pressione di 450 o 470 mm. con un aumento della frequenza e una diminuzione della profondità. Alla pressione minore di 400 mm. la respirazione diventa anche più profonda e avvicinandosi a 300 mm. di pressione si fa irregolare e comincia la dispnea. Si osservano dei periodi in cui il respiro è molto frequente, ed altri in cui è lentissimo, l'espiazione avviene a scatti e talora si hanno delle pause re-

spiratorio di parecchi secondi; generalmente la pausa si osservava dopo una inspirazione. Queste pause però non si susseguono regolarmente, come nella respirazione a periodi, descritta dal Mosso nell'uomo sul Monte Rosa, ma saltuariamente, senza ordine. Quanto più forte è la rarefazione e quanto più sofferente è l'orang-utang, tanto più esse sembrano frequenti; quando il respiro è così irregolare non si può nemmeno contarlo dall'esterno della campana.

Per meglio studiare i mutamenti che avvengono nel ritmo e nella profondità del respiro dell'orang-utang per effetto della rarefazione, ho fatto alcune esperienze in cui presi il tracciato della respirazione alla pressione normale, e poi nell'aria rarefatta e dopo di nuovo alla pressione normale.

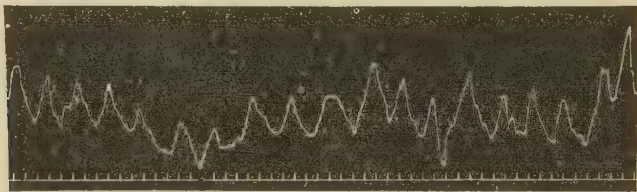


FIG. 2. — Respirazione toracica dell'Orang-utang alla pressione normale.
Tempo = 1 minuto secondo.

In queste esperienze andavo io stesso coll'orang-utang sotto una grande campana pneumatica di ferro, in cui potevo comodamente maneggiare gli apparecchi registratori. La ventilazione anche sotto questa grande campana rimaneva sufficientemente forte per impedire un accumulo di anidride carbonica, anche la temperatura non aumentava durante tutta l'esperienza che di uno o due gradi. La trasmissione ad aria coi timpani ha l'inconveniente di compiersi meno bene nell'aria rarefatta, ma non arrivando in queste esperienze ad una grande rarefazione, l'errore può essere trascurato.

Per brevità, riporto qui solo i tracciati di una esperienza, essendo i risultati delle altre simili a questi. L'esperienza fu fatta al mattino, quando l'orang-utang era ancora digiuno, la temperatura della stanza era 15° e la pressione 737 mm. Dopo aver applicato il pneumografo doppio intorno al torace dell'orang-utang, mi ero seduto sotto alla grande campana pneumatica, prendendo l'animale sulle ginocchia. Perchè restasse più tranquillo gli feci prendere la posizione supina e lo ricoprii con una coperta di lana. Attesi alcuni minuti, poi messo in comunicazione il pneumografo col timpano scrivente sul cilindro affumicato, presi il tracciato della respirazione toracica dell'orang-utan alla pressione normale: di esso ne è riprodotto un tratto nella fig. 2.

La respirazione dell'orang-utang, quando è sveglio, anche se apparentemente tranquillissimo e immobile, come in questo caso, è sempre irregolare, gli atti respiratori sono tutti diversi gli uni dagli altri, vi sono continue

oscillazioni nella tonicità dei muscoli toracici del respiro. La frequenza delle respirazioni è di 20 al minuto.

Preso il tracciato del respiro alla pressione normale, feci segno al meccanico di incominciare la rarefazione, contemporaneamente tolsi la comunicazione fra il pneumografo e il timpano scrivente per non rompere le membrane. L'orang-utang stava sempre immobile nella stessa posizione. In dieci minuti la pressione diminuì a 437 mm. di Hg, regolando la ventilazione feci in modo che essa vi rimanesse stazionaria.

L'orang-utang era divenuto sonnolento, di tanto in tanto chiudeva gli occhi. Misi di nuovo in comunicazione il pneumografo col timpano scrivente

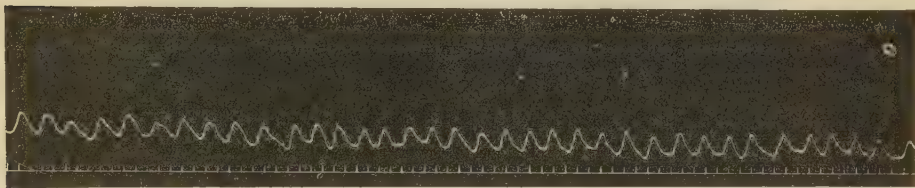


FIG. 3. — Respirazione toracica dell'Orang-utang alla pressione di 437 mm. di Hg.
Tempo = 1 minuto secondo.

e presi il tracciato del respiro alla pressione di 437 mm. che riproduco in parte nella fig. 3.

La respirazione è divenuta molto più regolare, le oscillazioni della tonicità sono scomparse, ciò probabilmente dipende solo dal fatto che l'animale si è addormentato, non dalla rarefazione dell'aria. Infatti questa regolarizzazione del respiro si osserva costantemente anche alla pressione normale quando l'orang-utang passa dalla veglia al sonno.

L'abbassamento del tracciato che si osserva nella fig. 3 non dipende da un aumento della tonicità dei muscoli toracici respiratori, ma da una lieve diminuzione di pressione nell'aria del pneumografo.

La frequenza del respiro alla pressione di 437 mm. è aumentata a 25-27 al minuto primo, contemporaneamente la profondità del respiro è molto diminuita. Queste modificazioni nella frequenza e profondità del respiro sono prodotte dalla rarefazione dell'aria, non dal sonno, perchè sappiamo che questo tende invece ad aumentare la respirazione toracica e a diminuire la respirazione addominale.

Dopo di aver scritto il tracciato del respiro nell'aria rarefatta, aumentai l'afflusso dell'aria nella campana per ritornare alla pressione normale.

Era vanto rimasti dodici minuti nell'aria rarefatta. La ricompressione avvenne lentamente e l'orang-utang continuò a dormire. Non appena la pressione fu di nuovo 737 mm., scrissi un altro tracciato della respirazione (fig. 4).

Il respiro, cessata l'azione dell'aria rarefatta, aumenta un po' in profondità, e diventa molto più lento 16-17 atti al minuto primo. Se confrontiamo poi questo tracciato con quello della fig. 2, vediamo che la respirazione non è ritornata normale, ma dopo l'azione dell'aria rarefatta è meno frequente e meno profonda.

Ciò conferma quanto dimostrai nell'uomo ⁽¹⁾, che cioè dopo il soggiorno nell'aria rarefatta si respira un volume d'aria minore, forse per effetto della diminuzione del CO₂ nel sangue e nei tessuti.

Fra i sintomi presentati dall'orang-utang nell'aria rarefatta, debbo ancora accennare ai crampi muscolari e alle paralisi. In una esperienza mentre l'ani-

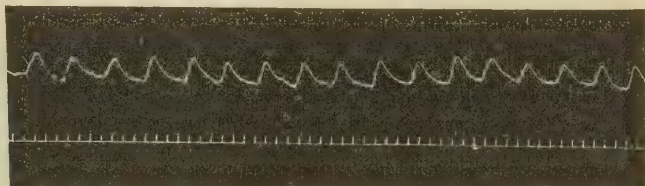


FIG. 4. — Respirazione toracica dell'Orang-utang cessata la respirazione.
Tempo = 1 minuto secondo.

male si trovava nell'aria rarefatta alla pressione di 324 mm. e non si risentiva della forte rarefazione perchè respirava un'aria sovraossigenata col 45,09 % di O₂, improvvisamente mentre giocava con un termometro che era sotto alla campana, si lasciò cadere a sedere emettendo delle grida di lamento, ed esprimendo nel viso un profondo dolore, colle mani si prendeva il piede destro cercando muoverlo. Dopo due minuti tutto era passato, l'orang-utang si alzava e riprendeva l'aspetto normale. Pel modo improvviso con cui si è manifestato il dolore, per l'immobilità del piede in contrattura, pel fatto che il dolore aumentava quando colle mani imprimeva qualche movimento all'arto, io credo che l'orang-utang avesse dei crampi muscolari. Questo disturbo lo rilevai una volta soltanto, durante tutte le esperienze.

In un'altra esperienza si ebbe per azione dell'aria rarefatta una paralisi di tutto l'arto inferiore sinistro. La pressione era di 304 mm. di Hg, l'orang-utang era sofferente, dormiva con respiro profondamente dispnoico, ma nulla faceva sospettare avesse una paralisi in una gamba; non appena la pressione fu ritornata normale e volli togliere l'animale da sotto alla campana, mi accorsi che esso non poteva muovere la gamba sinistra e che messo in terra camminava trascinandosela dietro: dopo due minuti, l'orang-utang camminava normalmente. Non saprei perciò dire se questo disturbo si è manifestato durante la forte rarefazione, eppure se debba considerarsi come un'azione postuma dell'aria rarefatta.

(1) A. Aggazzotti, R. Acc. dei Lincei, vol. XIII, 2° sem., pag. 208.

Non ho osservato nell'orang-utang un adattamento ed una resistenza progressivamente maggiore all'azione dell'aria rarefatta; i sintomi di malessere, aspetto sofferente, sonno, spossatezza muscolare, dispnea si presentarono sempre allo stesso grado di rarefazione, fra la pressione di 300 e 344 mm. di Hg. Poichè le esperienze venivano fatte per molti giorni di seguito, spesso tutte le mattine e talora anche due volte nella stessa giornata, data la costante resistenza dell'orang-utang, dobbiamo ammettere che la rarefazione graduale dell'aria e la lenta ricompressione, non lasciano lesioni apprezzabili o che almeno queste lesioni erano tanto leggere da scomparire poco tempo dopo che la pressione era ritornata normale. Vi furono, a metà circa delle esperienze, alcuni giorni durante i quali l'orang-utang si mostrò meno resistente all'azione dell'aria rarefatta e già alla pressione di soli 400 mm. stava molto male, ma soffrendo egli allora di dissenteria, credo doverne attribuire la causa all'indebolimento generale dell'organismo.

Da quanto abbiamo detto sul modo di reagire dell'orang-utang alla rarefazione dell'aria, si può concludere che l'azione esercitata da una progressiva e relativamente rapida diminuzione di pressione su questa scimmia è assai somigliante a quella che si verifica sugli altri animali e specialmente sull'uomo.

Zoologia. — *Un Gefreo pelagico: Pelagosphaera Aloysii*
n. gen. n. sp. Nota di PIO MINGAZZINI, presentata dal Socio F. TO-
DARO.

Nella raccolta di animali pelagici marini, eseguita dagli ufficiali della R. Marina Italiana, dott. comm. Achille Cavalli e tenente cav. Gino Ducci, durante il viaggio di circumnavigazione intorno al mondo negli anni 1903-905 della R. Nave *Liguria*, sotto il comando di S. A. R. il principe Luigi di Savoia, Duca degli Abruzzi, tra le altre interessanti e numerose forme da essi pescate, diligentemente fissate e conservate in formalina, munite dei dati necessari a questo genere di ricerca zoologica e donate a questo Museo di Zoologia degli animali invertebrati di Firenze, ve ne ha una che si presenta degna di grande interesse, sia perchè del tutto nuova alla scienza, sia perchè fornita di tali particolarità morfologiche, da dover esser resa nota colla maggior sollecitudine agli studiosi di Zoologia, ai quali credo di far cosa grata pubblicando su di essa le seguenti notizie.

Si tratta di un animale, per ora sfortunatamente rarissimo, perchè pescato in esemplare unico nel Pacifico australe, e precisamente nella Stazione XX di questa spedizione planctonica italiana, i cui caratteri anatomici corrispondono a quelli che presentano quei Vermi che sono inclusi nella classe

dei Gefirei e più specialmente alle forme appartenenti all'ordine dei Sipunculidi. I dati forniti dagli ufficiali della detta nave per la pesca eseguita nella Stazione in cui è stato trovato, sono i seguenti:

STAZIONE XX.

Data della pesca e durata della medesima: 18 luglio 1904; dalle 13.30 alle 14.30.

Direzione della rotta: In navigazione da Noumea (Nuova Caledonia) ad Auckland (Nuova Zelanda).

Località della pesca: Lat. 28°,20' sud; long. 170°,05' est Greenwich.

Direzione della nave durante la pesca: 150°,30' vero.

Temperatura dell'acqua alla superficie: 20° C.

Densità dell'acqua: 1,0268: *Salsedine della medesima:* 2,53592.

Stato del mare: Leggermente mosso; *stato del cielo:* sereno.

Velocità della nave durante la pesca: 3 miglia.

Corrente superficiale.

Pesche eseguite: Due, cioè una superficiale colla reticella del Müller, l'altra profonda col bertovello.

Questo Gefireo venne trovato colla pesca profonda.

Il bertovello ebbe 600 metri di cavo filato e fu affondato con zavorra; può approssimativamente calcolarsi che la profondità da esso raggiunta sia stata di 4-500 metri.

Il prodotto delle pesche, come al solito, venne fissato con formalina in soluzione debole, all'1 %, e conservato con formalina al 4 %, secondo la formula più in uso per la conservazione degli animali mediante il detto reagente, e pervenne a destinazione in ottimo stato di conservazione, in modo che anche questo Gefireo potè essere con facilità esaminato, disegnato e studiato, per quanto lo poteva permettere lo stato d'integrità nel quale ho voluto lasciarlo per venir conservato nel Museo insieme agli altri rappresentanti della raccolta.

Nei Gefirei non è questa, del resto, la sola specie che sia stata finora raccolta e studiata in un solo esemplare, ma per citare un esempio di altre forme assai interessanti di animali di questa classe pescate e studiate in un solo esemplare, citerò fra gli altri il *Saccosoma vitreum*, che sebbene appartenga all'ordine degli Echiuridi, pure si avvicina per certe particolarità a questo Gefireo e che venne trovato dalla Norska Nordavs-Expedition a 63°,22' lat. nord e 5°,29' ovest Greenwich, in un fondo sabbioso, alla profondità di 2222 m. e fu descritto da Danielssen e Koren; come pure le specie di *Phascolosoma* pescate a grandi profondità dal Travailleux e dal Talisman, cioè il *Ph. approximatum*, *scutiger* e *vitreum*, anch'esse descritte, da un solo esemplare, dal Roule, per non citare diverse altre specie che qui sarebbe

troppo lungo di enumerare. Varie specie di Gefirei sembrano rarissime e con probabilità sono da considerare in via di estinzione nell'epoca attuale; altre poi abitano località marine non ancora bene esplorate, come parte di quelle percorse dalla *Liguria*, e per esse è ancora prematuro il pronunziarsi sulla loro frequenza e rarità.

Tutti i Gefirei fin qui conosciuti sono indicati come animali bentonici: moltissimi si approfondano nella sabbia; altri vivono nelle cavità delle rocce; altri sulle superficie dei fondi marini. Questo da me descritto è invece essenzialmente pelagico, e tale lo designa non solo il reperto fatto dal bertovello, ma più ancora la sua forma e la qualità dei tessuti di cui è composto. La figura di questo animale è infatti perfettamente sferica; cioè esso possiede quella configurazione che è la più adattata al galleggiamento, che si riscontra in quelle specie pelagiche le quali si sono più modificate in tal senso ed hanno ridotti in gran parte gli organi locomotori speciali, o, non avendone, hanno semplicemente modificato la loro configurazione primitiva in una sfera. Così dai Protozoi ai Vertebrati si riscontrano talune forme nelle quali si è compiuto questo perfetto adattamento alla vita pelagica e ricorderò qui soltanto la *Noctiluca* ed il *Radiozoum* tra i Flagellati; i *Collozoum* e gli *Sphaerouzoum* tra i Radiolari; la *Trochosphaera* tra i Rotiferi; il *Mimonectes* fra gli Anfipodi e varie specie di Plectognati (Tetrodontidae) fra i pesci. A mio parere perde la *Trochosphaera aequatorialis* Semper, quel grande valore filogenetico che Semper, Hatscheck ed altri, le hanno voluto dare; e la sua forma e la speciale disposizione dei suoi organi, va semplicemente attribuita alla configurazione esattamente sferoidale presa dal suo rivestimento esterno, in seguito al suo perfetto adattamento alla vita pelagica. Infatti, una conformazione analoga a quella della *Trochosphaera* si trova in questo Gefireo il quale mantiene però la disposizione e la configurazione dei suoi diversi organi secondo l'organizzazione della Classe alla quale appartiene, molto diversa da quella dei Rotiferi, mentre la somiglianza fra queste due forme è notevolissima.

L'altra qualità che dimostra il carattere pelagico di questa specie è la sua trasparenza ⁽¹⁾. Tutti i tessuti che compongono i suoi organi sono trasparenti; hanno un aspetto completamente vitreo il tegumento, i muscoli, i nervi e le pareti del tubo digerente; sono alquanto opachi invece i nefridi e le gonadi; del resto il canale digerente, come avviene in molte altre forme pelagiche, si rende ben visibile per il suo contenuto alquanto opaco, formato

(1) Vi è fra i Gefirei questo fatto notevole, che cioè alcune forme sono del tutto od in parte trasparenti. Così fra i Sipunculidi, il *Sipunculus nitidus* Sluiter è in parte trasparente, il *S. pellucidus* Sluiter (della spedizione del Siboga) è quasi del tutto vitreo. Fra gli Echiuridi il *Saccosoma vitreum* è quasi del tutto trasparente. Per questa ed altre caratteristiche, non è improbabile che diversi degli attuali Gefirei siano stati, in epoche non molto lontane dalle attuali, planctonici.

principalmente da residui indigeriti e resi opachi di altri animali marini pelagici e alghe pelagiche, quali Crostacei, Anellidi e Diatomee.

Per una tacita convenzione intervenuta fra gli zoologi, queste forme a vita pelagica, la quale può dirsi aberrante rispetto a quella bentonica della totalità o quasi della classe alla quale appartengono, sono state indicate con un nome generico in cui la parola *Pelagos* serve di radicale (vedi ad es. i *Nemertini* e le *Oloturie*). Per conseguenza dovendo denominare con un termine generico nuovo questa forma di Gefireo, ho adottato quello di *Pelagosphaera* per indicare le due sue caratteristiche essenziali; e la designo col nome specifico di *Aloysii*, per dedicare questa forma a S. A. R. Luigi di Savoia, Duca degli Abruzzi, che ha voluto impiegare una parte del tempo assegnato al viaggio della nave da Lui comandata, in vantaggio della scienza zoologica.

La *Pelagosphaera Aloysii*, adunque, è un Gefireo sferico, perfettamente trasparente, del tutto incolore e del diametro di circa 6 millimetri. La sola colorazione che esso presenta è quella dei detriti degli alimenti svariati racchiusi entro il suo intestino. Si mostra però leggermente iridescente e questo fenomeno si osserva sia quando l'animale è immerso nella formalina, sia quando si trova nell'acqua o nell'alcool forte e tale iridescenza è simile a quella che si vede talvolta sulla superficie delle bolle di sapone sebbene vi sia, fra i diversi colori, una prevalenza nel giallo a riflesso metallico. Essa serve, al pari della trasparenza, a rendere questo Gefireo sempre più mimetico coll'acqua nella quale vive; ma del resto si osserva anche in altri Gefirei ed è piuttosto spiccata nel *Sipunculus nudus*. A mio parere, l'iridescenza è dovuta non a speciali colori propri dell'animale che la presenta, ma è causata da fenomeni d'interferenza che subisce la luce nel passare attraverso i tegumenti di questi esseri trasparenti o semitrasparenti e privi di colore proprio. Infatti questi tegumenti nella *Pelagosphaera*, come nel *Sipunculus nudus*, sono formati in gran parte da due strati di fibre muscolari lisce, tutte uguali e molto ravvicinate fra loro, disposte assai regolarmente, e attraverso le quali la luce subisce i fenomeni d'interferenza, che danno un aspetto iridescente al tegumento stesso. Altre forme animali marine, quali ad es. talune *Synapta*, diversi *Policheti* ecc., che presentano una conformazione consimile nella disposizione della muscolatura dei loro tegumenti, mostrano una simile iridescenza, la quale si osserva altresì sulla superficie esterna di organi (ad es. tubo digerente di moltissimi vertebrati) rivestiti da una trama regolare e potente di fibre muscolari lisce assai ravvicinate fra loro.

Il sistema digerente, bene sviluppato, si presenta con le due aperture piuttosto ravvicinate fra loro, cioè, più precisamente, coll'ano situato verso la parte anteriore del corpo ed in posizione dorsale. Sulla superficie ventrale si notano lateralmente, e situati verso la parte anteriore, due distinti organi segmentali, larghi, sacciformi, leggermente convoluti, del tipo generale di quelli così caratteristici dei Gefirei. Esiste lungo la linea mediana della superficie ven-

trale stessa, un lungo e regolare cordone nervoso, che emana lateralmente a distanze uguali, in direzione obliqua, numerose paia di nervi che ben presto scompaiono, perchè si perdono fra i muscoli della parete del corpo, che anteriormente sembrano più lunghi perchè il cordone ivi non sta aderente allo strato muscolare e si dirige intorno alla faringe ove forma l'anello caratteristico il quale dorsalmente si congiunge coi due gangli cerebroidi. Queste parti non sono rappresentate nelle figure, perchè nascoste dalle intersezioni dei muscoli retrattori. Posteriormente il cordone nervoso ventrale termina con un leggiero rigonfiamento, del tutto simile a quello che presenta il cordone nervoso del *Sipunculus* e tale rigonfiamento designa il punto della superficie della sfera che corrisponde all'estremità posteriore del corpo, che negli altri Gefirei, i quali hanno forma cilindrica o cilindroide è determinato dall'estremità posteriore del cilindro.

L'intestino forma una curvatura generale ad ansa a causa della vicinanza delle sue aperture; in prossimità di queste è cilindrico, nel resto si mostra più o meno rigonfiato. Sebbene questa specie presenti bene sviluppate e conformate le gonadi, tuttavia io non posso sicuramente asserire che essa sia giunta a completo sviluppo e non si debba considerarla come in uno stato ancora giovanile. Ciò ha influenza sulla conformazione del sistema digerente, come ha dimostrato Hatschek per il *Sipunculus nudus*, nel quale l'avvolgimento a spira delle anse intestinali nel giovane è molto minore che nell'adulto. L'ansa semplice che forma il sistema digerente della *Pelagosphaera* ricorda in qualche modo una condizione che si trova nelle larve dei *Sipunculida*, che potrebbe però avere persistito nello stato adulto di talune forme di quest'ordine, da considerarsi meno modificate delle altre.

Una conformazione assai caratteristica e morfologicamente molto importante, è quella che presenta la bocca di questa *Pelagosphaera*. Essa è una apertura perfettamente circolare sulla quale si vedono piccole sfrangiature piuttosto regolari del contorno, posta su un leggiero rialzo a tronco di cono che si erge sulla superficie della sfera e la deprime alquanto per una piccola area all'interno. Tale rialzo, comprendente la bocca, corrisponde alla estremità anteriore dell'animale; esso è formato da un anello di muscoli circolari più sviluppati per grossezza e per numero di quello dello strato dei muscoli circolari del tegumento ai quali appartengono; inoltre possiede muscoli longitudinali i quali si continuano con quelli corrispondenti ai longitudinali del tegumento e che si vedono partire dalla detta formazione come i meridiani di una sfera. Tale formazione essenzialmente muscolare, corrisponde morfologicamente alla porzione anteriore di quel caratteristico organo che si trova nell'estremità anteriore del corpo dei Gefirei e che viene indicato col nome di Tromba. Io non posso decidere se nell'animale vivente tale formazione non sia un poco più protuberante di quella che si vede nell'animale fissato, poichè talvolta anche un liquido il quale, come la formalina, non

induce sensibili deformazioni generali nella configurazione e aspetto della maggioranza dei delicatissimi animali marini pelagici, cagiona in determinate parti, specialmente in quelle in cui prevalgono gli elementi muscolari, leggere contrazioni e deformazioni. Non sembra che attorno alla bocca vi

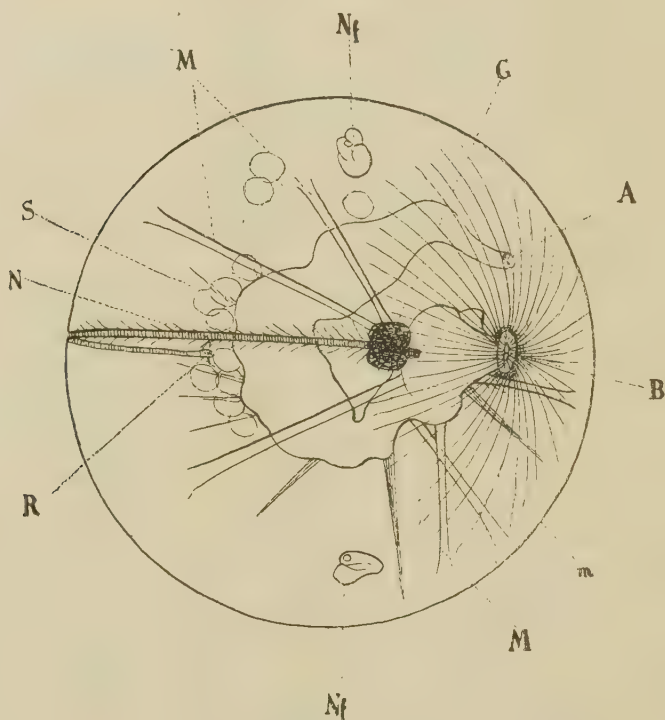


FIG. 1.

siano tentacoli, ma non posso decidere se siano retratti e poco sviluppati o manchino del tutto non avendo fatto sezioni dell'esemplare; la sfrangiatura del contorno boccale potrebbe rappresentare un accenno alla formazione tentacolare. Del resto la famiglia *Tylosomidae* fra i *Sipunculidi* è caratterizzata da specie prive di tentacoli.

Alla bocca fa seguito una faringe anteriormente cilindrica, posteriormente alquanto dilatata a tronco di cono. Segue poi un tratto rigonfiato, che s'innesta bruscamente sulla faringe, e presenta anteriormente una fila di tuberosità semisferiche molto ravvicinate fra loro. Nella parte posteriore esso si restringe alquanto e quindi segue l'intestino, il quale è assai largo e nella sua parte media s'incurva ad ansa e poscia si dirige anteriormente. Nella sua parte terminale si continua con un retto di forma cilindrica, il quale sbocca mediante l'apertura anale all'esterno, nella superficie dorsale,

a non grande distanza dalla bocca. All'interno dell'ano i muscoli sono alquanto più numerosi ed ispessiti che nel resto del tegumento.

Un apparato assai sviluppato di questo Gefireo è quello dei muscoli retrattori, che sono numerosi e formati da fasci molto sviluppati e potenti.

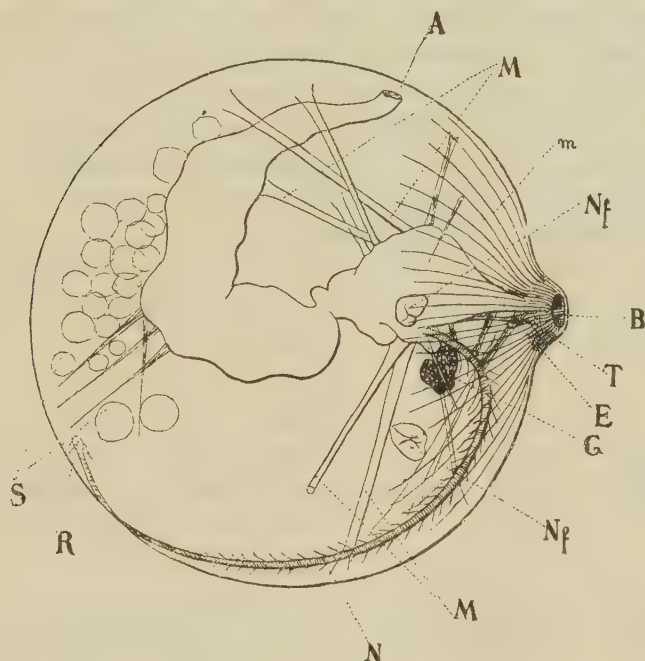


FIG. 2.

Spiegazione delle figure. — A ano; B bocca; G gonadi; M muscoli retrattori; *m* muscoli longitudinali boccali; T muscoli circolari boccali; N cordone nervoso; Nf nefridi; R rigonfiamento terminale del cordone nervoso; S sostanza adiposa.

Essi s'inseriscono con una estremità sulla parte rigonfiata della faringe, e coll'altra su una zona della faccia interna del rivestimento muscolo-cutaneo, non molto distante dalla linea equatoriale della sfera. Alcuni hanno un'attacco più anteriore, altri alquanto posteriore. Si possono distinguere in dorsali, laterali e ventrali: due sono ventrali, quattro laterali e quattro dorsali; inoltre se ne vedono altri meno sviluppati intercalati fra i precedenti. Vi è altresì bene sviluppato il così detto *muscolo fusiforme* qui rappresentato da varî fasci, che nascono nella regione posteriore del corpo, in vicinanza cioè del rigonfiamento terminale del cordone nervoso ventrale, che servono a fissare l'intestino alla parete muscolo-cutanea e in gran parte s'inseriscono sull'apice della curva dell'ansa intestinale.

Infine ricordo qui i due nefridi ben sviluppati e sboccanti sulla superficie latero-ventrale della parte anteriore del corpo; le gonadi in numero di

due, poste quasi allo stesso livello dei nefridi, formate da due glandole piriformi ravvicinate e situate sui due lati del piano mediano, inserite sulla faccia ventrale della faringe, tra questa e il cordone nervoso ventrale, piene di elementi sferoidali, alquanto opachi, che sembrano ova; ed in ultimo vanno segnalate numerose sferule di sostanza apparentemente adiposa, che si trova accumulata nella cavità generale del corpo di questo Gefireo, dietro l'ansa intestinale. Il rivestimento esterno di questo animale è costituito da una cuticola trasparente che ricopre un ipoderma cellulare e sotto di questo vi sono i due caratteristici strati muscolari regolarissimi che determinano sulla superficie del corpo, nei punti in cui sono più sviluppati dei rilievi quadrangolari regolari. Non ho potuto constatare sulla superficie esterna del corpo alcun rivestimento di ciglia vibratili.

Dalla descrizione qui data risulta che la *Pelagosphaera Aloysii* Ming., appartiene alla classe dei Gefirei, ordine *Sipunculida* e probabilmente rappresenta una nuova famiglia.

Fisiologia vegetale. — *Pressione e tensione delle cellule di lievito.* Nota del dott. E. PANTANELLI ⁽¹⁾, presentata dal Socio R. PIROTTA.

Nägeli ⁽²⁾ per il primo speculò su le condizioni diosmotiche del lievito, soprattutto su la sua permeabilità, ma non fece misure in proposito. Egualmente Prior ⁽³⁾ ed il suo allievo Elliesen ⁽⁴⁾ giudicano la permeabilità del lievito da la rapidità con cui i diversi zuccheri vengono fermentati, un criterio abbastanza dubbio, e d'Arsonval ⁽⁵⁾ ritiene che nell'interno delle cellule di lievito regni una pressione osmotica enorme, forse di qualche migliaio di atmosfere, perchè ha visto che cellule di lievito plasmolizzate con diverse soluzioni saline muoiono nel congelò, a differenza delle cellule intatte, le quali notoriamente resistono anche a — 90° ⁽⁶⁾.

Mancava dunque qualsiasi misura diretta del turgore del lievito, allorchè intrapresi queste ricerche, in continuazione a i miei studî analoghi su funghi pluricellulari, ma or è un mese è comparsa su questo tema una Memoria

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto Botanico di Roma, 15 giugno 1905.

(2) Nägeli, C. v., *Theorie der Gärung*, 1879, pagg. 39-42, 93, 105.

(3) Prior, E., *Centralbl. f. Bakteriöl.* (2), I, pagg. 445-446 (1895); *Ibidem*, II, pag. 322 (1896); III. *Ibidem*, pag. 568; IV. *Physiologie und Chemie des Malzes und des Bieres*, 1896.

(4) Elliesen, M., *Centralbl. f. Bakteriöl.* (2), VII, pag. 500 (1901).

(5) D'Arsonval, *Comptes rendus*, CXXXIII, pag. 84 (1901).

(6) Pfeffer, *Pflanzenphysiologie*, II, pag. 306 (1901).

di Swellengrebel (1), ciò che mi ha incitato a far noti senza indugio i miei risultati (2).

Il lavoro di Swellengrebel, che ha ripetuto fedelmente per cellule di lievito le ricerche che io avevo due anni or sono eseguito su le muffe, tocca varie delle questioni, che io pure ho studiato. Ma siccome le mie esperienze vennero disposte in modo diverso, anzitutto con scopi diversi da quelli di Swellengrebel, così non è a meravigliarsi, se i miei risultati non sempre collimano con quelli di Swellengrebel. Inoltre egli non ha adoperato culture pure di determinate razze, si è servito del NaCl come sostanza plasmolitica, mentre per questo sale le cellule di lievito sono leggermente permeabili, e soprattutto non ha tenuto conto della *tensione* delle cellule, così che le sue misure di *pressione* prive della correzione dovuta a la tensione hanno un valore relativo (3).

Siccome il metodo crioscopico non è applicabile a le cellule di lievito, perchè non se ne può cavare completamente il succo (4) e questo è tanto ricco di protoplasma, glicogeno, gomma ed altri colloidi, che la misura della sua pressione osmotica non è sicura, come ha dovuto riconoscere Swellengrebel, il quale sperava di poter applicare a le cellule di lievito i metodi da me escogitati per i funghi pluricellulari, così ho dovuto io pure fare uso del solo metodo plasmolitico. Questo consiste notoriamente nel portare le cellule in soluzioni di diversa concentrazione, finchè si trova quella che basta a fare uscire acqua da la cellula, ciò che nel nostro caso si riconosce o per il distacco del protoplasto da la parete o per lo meno per una visibile diminuzione di volume della cellula e dei suoi vacuoli.

Metodi. — Su i metodi di cultura e di semina, come pure su la condotta delle esperienze rimando a la Memoria diffusa. Qui dirò solo che la plasmolisi fu ottenuta con soluzioni di CaCl_2 differenti fra loro di 0,25 *is.* (5),

(1) Swellengrebel, Centralbl. f. Bakteriöl., (2), XIV, pag. 374 (1905).

(2) Del resto avevo già preannunziato in un mio lavoro, datato da Berlino il 28 giugno 1904, e comparso in Annali di Botanica, II, pag. 195 (10 gennaio 1905), che mi occupavo del lievito. — La presente Nota è il sunto di una Memoria, già consegnata a la stampa.

(3) Sul significato di questi termini e considerazioni vedi Pantanelli E., Nuovo Giornale Botanico, (2), XI, pag. 337 (1904); Jahrbücher f. wiss. Botanik, XL, pag. 314 (1904).

(4) Cfr. Fernbach A., Annales d. Institut Pasteur, IV, pag. 651 (1890). Anche con il metodo di Buchner (Zymasegärung, 1903, pag. 65) si ottiene solo il 60 % del contenuto cellulare.

(5) Sul significato di questa unità osmotica vedi Pantanelli E., Malpighia, XVIII, pag. 102 (1904). Un *is.* è la pressione osmotica di 0,1 Mol. KNO_3 , equivale quindi a 4,51 kg. cm^{-2} o 4,367 atm. — Il calcolo della concentrazione osmotica (Hamburger, Osmotische Druck- und Ionenlehre, 1902, I, pag. 14) delle soluzioni di CaCl_2 venne fatto su i valori di Dieterici, cfr. Pantanelli, Jahrb. f. wiss. Bot., l. c. pag. 306.

per il qual sale la cellula di qualsiasi lievito è assolutamente impermeabile. Anche la tensione delle cellule fu misurata con il metodo plasmolitico (1).

Soluzioni nutritizie. — Come tipo (soluzione normale) venne preso non il mosto di vino o di birra, la cui composizione è oscillante e non completamente nota, ma una soluzione contenente 1 % $\text{NH}_4 \text{NO}_3$, 0,5 % $\text{KH}_2 \text{PO}_4$, 0,25 % MgSO_4 (0,52 % $\text{MgSO}_4 + 7 \text{aq.}$). A questa soluzione aggiungevo 5-10 % saccarosio cristallizzato o glucosio Merck, come pure sali diversi o altre sostanze in quantità svariate.

Lasciando da parte una lunga serie di esperienze preliminari, parlerò qui dei risultati principali di alcune serie di esperienze. La razza di lievito adoperata fu per lo più una razza isolata da me da lievito in fermentazione di pane casalingo romano. Essa è a fermentazione alta (in parte), è probabilmente un *Cerevisiae* (2), ha cellule grandi, tondeggianti, forma facilmente spore (una per ogni cellula) a 29°, se coltivata in sciroppo di zucchero su blocchetti di gesso. Alcune misure vennero inoltre eseguite con diverse razze di *Sacch. ellipsoideus* isolate da vini italiani, poi con *Sacch. apiculatus*, *Schizosaccharomyces Pombe* e *Torula* (lievito rosa).

PRIMA SERIE. Culture non aereate, chiuse con colmatore ad $\text{H}_2 \text{SO}_4$. Sostanza fermentiscibile: saccarosio. — In soluzione normale (v. sopra) il turgore sale subito dopo la semina, per effetto della fornitura di alimento, e si mantiene pressochè costante nei primi 3-4 giorni di fermentazione. Ma poi, con la produzione di alcool, glicerina, acidi ecc. aumenta la concentrazione esterna e il turgore sale leggermente, per mantenersi di nuovo costante qualche settimana. In seguito con l'esaurimento dei materiali alimentari, diminuisce di nuovo. Di tutte queste variazioni non si è affatto accorto Swellengrebel. Egli porta in proposito un'esperienza, in cui il suo lievito impuro venne coltivato su decotto di uva secca: in tre giorni il turgore non si mosse, e ciò bastò a l'A. per troncane l'esperienza.

Quanto a la tensione (grado di distensione elastica) delle cellule, essa subisce un forte aumento subito dopo la semina, poi diminuisce, allorchè la gemmazione rallenta per l'azione narcotizzante dell'alcool e dell' CO_2 prodotti nella fermentazione, e torna poi ad aumentare più o meno distintamente quando la fermentazione è cessata.

Mettendo in relazione i valori della tensione con quelli del turgore, si trova che la *pressione* non varia parallelamente a i valori plasmolitici, ma deve continuamente salire dal momento della semina durante la fermentazione fino a che questa è finita ed allora diminuire di nuovo. Questa variazione

(1) Ibidem, pag. 315.

(2) Il lievito della fermentazione panaria si suole ascrivere a i *Cerevisiae*, ciò che fa per lo meno meraviglia, p. es. da noi, dove la fabbricazione della birra non esiste o è stata importata negli ultimi anni. Anche Beijerinck nega che il lievito del pane sia un *Cerevisiae* e lo chiama *Sacch. panis*.

del potenziale cellulare è evidentemente dovuta a l'aumento continuo della concentrazione esterna per la produzione di alcool ed altre sostanze a piccola molecola.

Per le soluzioni *concentrate* colpisce il fatto, che il turgore del lievito si lascia influenzare non solo da la quantità, ma anche da la qualità della sostanza aggiunta, così che ad irritazioni isosmotiche prodotte da sostanze diverse corrispondono reazioni osmotiche di altezza diversa. Così la glicerina e gli zuccheri svegliano reazioni molto molto più ampie (da 6-7 *is.* a 15-17 *is.* per un aumento esterno da 3 a 13 *is.*) dei sali inorganici, fra cui i più impermeabili (CaCl_2 e MgSO_4) svegliano le reazioni minime (da 6-7 *is.* a 11-12 *is.* per un aumento esterno da 3 a 13 *is.*).

La tensione è minima in soluzioni con molto CaCl_2 o MgSO_4 , ma in KNO_3 è ancor maggiore che in glicerina o zucchero. Essa però varia con l'età un po' diversamente nelle diverse soluzioni: particolarità che qui ometto. Un fatto generale è però che tanto il turgore come la tensione variano con l'età nello stesso modo in soluzioni concentrate come in soluzioni diluite.

SECONDA SERIE. *Culture aereate* (a la pompa). *Sostanza fermentiscibile: saccarosio*. L'aereazione cambia notevolmente l'andamento delle reazioni osmotiche del lievito. In soluzione normale il turgore aumenta continuamente fino al 12° giorno da la semina, per poi diminuire. La tensione invece sale solo fino al 5° giorno, diminuisce notevolmente fino al 12° giorno e risale dopo, con la vecchiaia. Da ciò risulta che la pressione sale ancora fra il 5° e il 12° giorno. Siccome poi la tensione non è in generale maggiore nelle culture aereate rispetto a le corrispondenti culture non aereate, così il maggior turgore nelle prime è realmente da ascrivere ad una *pressione superiore*. Anche in soluzioni concentrate si osservano press'a poco gli stessi fenomeni, per cui non v'ha dubbio, che l'aereazione favorisca le regolazione osmotiche del lievito di pane romano, al pari che nelle muffe. Swellengrebel invece (l. c. p. 486) ha trovato che il suo miscuglio di lieviti, coltivato su gelatina, aerobicamente e anaerobicamente ha lo stesso turgore. Il lievito da me adoperato si comporta decisamente in altro modo, come mostra anche la

TERZA SERIE. *Culture su gelatina glucosata*, in scatole Petri, quindi perfettamente aereate. Si ebbero valori di turgore addirittura enormi (fino a 36 *is.* su gelatina normale + 10 *is.* (13,9 %) glicerina), molto maggiori che nelle corrispondenti culture in liquido non aereate (vedi serie seguente), mentre la tensione si mantenne press'a poco a la stessa altezza.

QUARTA SERIE. *Culture non aereate* (con colmatore). *Sostanza fermentiscibile: glucosio*. — Furono fatte più che altro per paragonarle con quelle della precedente serie. Dettero risultati analoghi a quelli della prima serie.

Risultava dunque fin qui in modo non dubbio, che la razza di lievito in parola compie meglio le reazioni osmotiche se è bene aereata. Nè è da obbiectarsi, che nella seconda serie il maggior turgore fosse dovuto a lo sco-

timento delle cellule per il passaggio delle bolle d'aria ⁽¹⁾, perchè nelle culture su gelatina si ebbe un turgore anche superiore. Ad ogni modo per togliere ogni fondamento a questa obbiezione, vennero fatte esperienze in corrente di gas inerti, quali l'idrogeno e l'azoto, e di un gas importantissimo nella vita del lievito, l'acido carbonico.

QUINTA SERIE. *Culture in corrente di idrogeno. Sostanza fermentiscibile: saccarosio o glucosio.* — In soluzione normale, il turgore sale dal 2° a l'8° giorno, mentre la tensione aumenta un poco dopo la semina, poi diminuisce fino al 4° giorno, per risalire leggermente in seguito. Dunque tanto il turgore come la tensione variano in corrente di idrogeno come in culture non aereate (1^a e 4^a serie).

In soluzioni concentrate (ipertoniche al momento della semina), il turgore sale fino al 2° o anche fino al 4° giorno per poi diminuire. La tensione, da minima che è in principio perchè la cellula appena seminata rimane plasmolizzata e solo dopo un giorno o due — forse in seguito alla produzione di alcool — riesce a deplasmolizzarsi, sale continuamente, ma si mantiene sempre minore che in soluzioni diluite. In generale, nell'idrogeno i valori del turgore e della tensione si mostrano quasi eguali a quelli delle corrispondenti culture non aereate. Bisogna però considerare, che l'effetto deprimente della mancanza d'aria viene in parte compensato da l'allontanamento dell'CO₂ (cfr. 7^a serie) e di una gran parte dei prodotti volatili della fermentazione per opera della corrente d'idrogeno che se li trascina con sè ⁽²⁾.

SESTA SERIE. *Culture in corrente d'azoto* ⁽³⁾. *Sostanza fermentiscibile: glucosio.* — Vennero osservati gli stessi fatti come nella serie precedente.

Tutto ciò mostra adunque, che la maggiore ampiezza della reazione osmotica in culture aereate a la pompa (2^a serie) non è dovuta a lo scoti-

(1) Su l'effetto dello scotimento su la moltiplicazione del lievito e la fermentazione gli autori non sono concordi. Lo scotimento è sfavorevole secondo Horvath, Arch. f. ges. Physiol., XVII, pag. 125 (1879), Ray, Comptes rendus, CXXIII, pag. 907 (1895), Rapp, Ber. chem. Ges., XXIX, pag. 1893 (1896), Buchner e Rapp, Zymasegärung, 1903, pag. 375; indifferente secondo Nägeli, Theorie der Gärung, 1879, pag. 88, Chudjakow, Landw. Jahrbücher, XXIII, pag. 428 (1894); favorevole, purchè moderato, secondo Hansen, Comptes rendus du Labor. d. Carlsberg, I. pag. 271 (1879) e Delbrück, Dingler's Polytechnisches Journal, CCLXIII, pag. 530 (1887). Probabilmente le diverse razze si comportano diversamente. Per i bacteri, vedi Galli-Valerio, Centralbl. f. Bakteriöl., (1), XXXVII, pag. 151 (1904), e Horvath, l. c.

(2) Su la moltiplicazione del lievito e la fermentazione in atmosfera d'idrogeno cfr. specialmente Chudjakow, l. c.; Rapp, l. c.; Korff, Centralbl. f. Bakteriöl., (2), IV, pag. 465 (1898); Buchner e Rapp, Zeitschr. f. Biol., XXXVII, pag. 82, (1899); Buchner, Zymasegärung, pag. 368 e segg.

(3) L'azoto fu adoperato per scacciare l'aria solo da Iwanowski e Obrastzow, Centralbl. f. Bakteriöl., (2), VII, pag. 305 (1901), e Kostytchew, Jahrb., f. wiss. Bot., XL, pag. 563, (1904).

mento, che non mancava nelle esperienze della 5^a e 6^a serie, ma a l'influenza benefica dell'aereazione. Di speciale interesse è poi la

SETTIMA SERIE. *Culture in corrente di acido carbonico. Sostanze fermentiscibili: saccarosio o glucosio.* — È un fatto ormai assodato, che l'acido carbonico sviluppato nella fermentazione ha un'azione narcotizzante su le cellule stesse che lo producono, al pari dell'altro principale prodotto della fermentazione, l'alcool (¹). La cellula di lievito cade in uno stato di anestesia: la gemmazione si arresta, i vacuoli scompaiono, il protoplasma si fa omogeneo e splendente. Le cellule perdono i nessi di gemmazione e si isolano nel liquido, mentre la zimasi, indifferente a le condizioni di anestesia della cellula che l'ha prodotta, continua indisturbata il suo lavoro di riduzione dello zucchero.

Può la cellula di lievito reagire osmoticamente in atmosfera di CO₂?

Ho ottenuto diversi risultati con le varie razze di lievito.

Nelle cellule di lievito di pane romano, a fermentazione alta, la facoltà di reagire agli stimoli osmotici è molto ridotta o addirittura soppressa in atmosfera di CO₂. Se si seminano le cellule di detta razza in soluzione ipertonica attraversata da la corrente di CO₂, la plasmolisi non scompare da le cellule neppure in 3 settimane. Anche in soluzioni ipotoniche, diluite, le oscillazioni del turgore e della tensione, che abbiamo visto compiersi normalmente, sono assai ristrette, però non mancano del tutto. La gemmazione non comincia mai, e il lievito si *agglutina* tenacemente per escrescenza di molto muco (²), che si può facilmente dimostrare, oltre che precipitandolo con acido tannico o zucchero di piombo, anche in preparati al violetto di metile, violetto di genziana o bleu di metilene. Una gran parte dello zucchero rimane indecomposto. Evidentemente oltre a la zimasi che già contenevano le cellule prima della semina, non se ne forma più in atmosfera di CO₂.

Invece altri lieviti a fermentazione bassa, per es. il lievito del vino Lambrusco di Modena, che è spiccatamente anaerobio, compiono in corrente di CO₂ reazioni osmotiche con la stessa ampiezza come in culture con colmatore o con tappo d'ovatta e non si agglutinano. Questi lieviti si compor-

(1) Vedi specialmente Ortloff, Centralbl. f. Bakteriöl., (2), VI, pag. 676 (1900). Secondo questo A., l'CO₂ danneggia la moltiplicazione del lievito, ma favorisce la fermentazione, evidentemente per pura azione ionica su la zimasi; Boussingault, Agronomie, VII, pag. 82 (1884), aveva già trovato, che l'asportazione dell'alcool e dell'CO₂ favorisce in complesso la fermentazione.

(2) Su l'agglutinazione del lievito vedi Will, Centralbl. f. Bakteriöl., (2), IV, pag. 130 (1898); Macfadyen, Ibidem, (1), XXX, pag. 368 (1901); Barendrecht, Ibidem, (2), VII, pag. 623 (1901). Il muco che viene escretto dalle cellule di lievito è senza dubbio quello che forma normalmente nelle vecchie culture il « gelatinöse Netzwerk » descritto e figurato da Hansen. Su le sostanze albuminali o simili emesse in diverse circostanze dal lievito vedi Pasteur, Ann. chim. et phys., LVIII, pag. 323 (1858); Nägeli, l. c., pag. 93; Prior, l. c. (1896); Béchamp, Comptes rendus, LXXXVIII, pag. 474 (1879); Lintner, Centralbl. f. Bakteriöl., (2), V, pag. 793 (1899); Issajew, Zeitschr. ges. Brauwesen, XXIII, pag. 796 (1900).

tano dunque come il lievito di Swellengrebel, il quale, con troppa fretta, enuncia come fatto generale che « il turgore del lievito è indipendente da l'aereazione ». Egli non ha del resto indicato, se il suo lievito è a fermentazione alta o bassa.

Regolazioni osmotiche. — Infine venne studiato il potere regolatore delle cellule di lievito di fronte a variazioni improvvise della concentrazione esterna. In complesso, il lievito da me adoperato si comporta come quello di Swellengrebel quanto a l'ampiezza e la velocità della catatonosi e della anatonosi, che si compiono nel lievito assai più adagio che nelle muffe, e quindi non mostrano le oscillazioni susseguenti (¹). Però nel lievito di pane in questione il turgore oltrepassa sempre nel primo periodo dell'anatonosi (2 o tre ore dopo l'aumento della concentrazione esterna) il valore di equilibrio finale, per poi ridiscendere lentamente ad esso, ciò che Swellengrebel (l. c. pagg. 484-485) nega per il suo lievito.

Un fatto importante è che il potere di regolazione del turgore, sia in aumento, sia in diminuzione, va riducendosi con l'età. Per eliminare la fonte di errore proveniente dal fatto, che con l'aggiunta di nova soluzione nutritizia o no si cambia la concentrazione degli alimenti e dei prodotti, e quindi si modificano radicalmente le condizioni dell'attività cellulare, ho disposto sempre culture doppie, parallele, seminate di egual quantità di un medesimo lievito. Una delle due culture veniva filtrata al momento dell'esperienza e il liquido filtrato, che si trovava quindi a lo stesso punto di fermentazione del liquido dell'altra cultura, ma conteneva 10 *is.* di un sale in più o in meno, veniva aggiunto a l'altra cultura, così che il lievito si trovava esposto a la sola variazione di ± 5 *is.* di sale, mentre la concentrazione di tutte le altre sostanze restava invariata. Con questo metodo ho potuto stabilire, che mentre il 2°-4° giorno dopo la semina l'ampiezza di regolazione arriva a $\pm 6-7$ *is.*, per un salto di ± 5 *is.* nella concentrazione esterna, dopo 7 o più giorni di fermentazione la reazione si riduce a $\pm 2-3$ *is.*, per la stessa variazione esterna. Inoltre aumenta sempre il numero di cellule che muoiono per la brusca variazione osmotica esterna.

Risulta quindi, che appunto i due fattori, a cui Swellengrebel ha negato valore — ciò che del resto può esser giusto per la miscela di lieviti da lui adoperata — cioè l'aereazione e l'età o, se si vuole, lo *stadio di fermentazione*, influenzano in misura amplissima la facoltà di reazione osmotica di determinati lieviti. Ora, siccome il potere di regolazione osmotica è l'indicatore dell'attività cellulare più fedele e più delicato che stia a nostra disposizione, si può concludere da queste ricerche, che bisogna andar cauti nel dichiarare « anaerobio facoltativo » qualsiasi lievito alcoolico. Pare invece che il lievito sopravviva a periodi anaerobii solo perchè cade in narcosi più o meno profonda.

(¹) Per le cellule delle muffe ho stabilito (v. lavori citati), che da la rapidità della prima reazione osmotica dipende la comparsa di oscillazioni susseguenti del turgore.

Patologia vegetale. — *Intorno al deperimento dei medicai cagionato da Urophlyctis Alfalfae, P. Magn.* Nota del dott. VITTORIO PEGLION, presentata dal Corrispondente G. CUBONI.

La larga estensione acquisita nel volger di pochi lustri dalla coltivazione intensiva dell'erba medica in rotazione normale o lenta, è uno dei fattori principali degli elevati prodotti unitari che si ricavano nelle progredite aziende della Bassa valle del Po in genere, del Ferrarese in specie. L'azione eminentemente miglioratrice esplicita dai medicai è ormai nota a tutti i pratici illuminati che dedicano pertanto a questa coltivazione le più raffinate cure colturali, sia dal punto di vista della preparazione fisica del suolo, sia da quello delle concimazioni. Tuttavia accade spesso di sentire i coltivatori accennare ad insuccessi contro cui i mezzi di azione usuali non valgono: anticamente i medicai duravano, mantenendosi produttivi, decine di anni; oggi in più di una località, ove la coltivazione dell'erba medica viene eseguita a regola d'arte, i medicai cominciano a deperire rapidamente e devono essere rotti dopo pochi anni, riuscendo inefficaci la somministrazione di concimi complementari, le erpicature ed altre operazioni consimili che si sogliono praticare in quelle circostanze.

Questo deperimento non ha nulla che vedere colla scomparsa delle piante di medica in seguito al parassitismo della cuscuto o della *Rhizoctonia violacea*: avversità purtroppo assai diffuse ma contro le quali si procura di agire energicamente, con i mezzi noti ai pratici coltivatori. La scomparsa delle piante di medica, che provoca negli appezzamenti la formazione di radure più o meno estese (vulgo: *chieriche*), rapidamente occupate da graminacee e da composite, accade progressivamente senza che vi si avvertano le tracce facilmente reperibili dei parassiti anzi detti. Nè si può attribuire il fenomeno all'eventuale deficienza di *Rhizobium* o *Pseudomonas radiculicola*, poichè il semplice esame delle radici, nelle piante deperenti, rivela la presenza di numerosi caratteristici tubercoli.

La spiegazione più ovvia di tale fenomeno è quella che considera lo stesso come esponente della *stanchezza* del suolo, derivante a sua volta dal troppo frequente ritorno della medica sugli stessi appezzamenti. Siffatta spiegazione è però tutt'altro che esauriente ed esige ulteriori studi che valgano a precisarne le portate. In altri casi consimili, ciò che era interpretato come *stanchezza* del suolo verso una determinata coltura, è divenuto invece un caso tipico di parassitismo: ancora oggi i pratici tedeschi chiamano *Ruben mudigkeit* il deperimento della bietola cagionato da *Heterodera*; e l'aver

osservato che soventi il metodo più efficace per combattere la stanchezza del suolo consiste nel praticare delle iniezioni di solfuro di carbonio, sta ad indicare che il parassitismo partecipa largamente al fenomeno.

Nello studiare alcuni cespi di erba medica, provenienti da una coltivazione in via di progressivo deperimento sebbene avviata da due anni appena, mi è stato dato di avvertire la presenza di uno speciale parassita crittogamico non ancora segnalato in Italia e che ritengo assai più diffuso di quanto si possa supporre a prima vista. I primi esemplari da me osservati provenivano da un medicaio situato a Saletta in quel di Copparo; alcune esplorazioni sommarie compiute successivamente in medicai situati nei dintorni di Ferrara mi hanno permesso di avvertire anche in essi la presenza del parassita: aggiungo che si tratta sempre di medicai in cui la scomparsa delle piante e la formazione della radure o chieriche è indipendente da grongo e da malvinato.

Il parassita in questione è una chitridiacea: l'*Urophlyctis Alfalfae*; segnalato nel 1895 da Lagerheim come parassita della medica presso Latacunga (Rep. dell'Equatore) sotto il nome di *Cladochytrium Arfalfae*, esso venne in seguito dallo stesso Autore descritto come temuto parassita della medica ed identificato col nome di *Physoderma leproides*, col parassita che determina il mal del gozzo delle radici di Bietola. Di recente il Magnus ne segnalava la presenza su piante di medica provenienti da Colmar in Alsazia ed in un accurato studio descriveva il parassita come specie a sè e diversa dal parassita delle Bietole sotto il nome di *Urophlyctis Alfalfae* P. Magn.

Tanto Lagerheim quanto Magnus hanno descritto le caratteristiche galle o tubercoli che questo parassita determina sul sistema radicale delle piante colpite: ma le lesioni specifiche dell'*Urophlyctis* non si limitano alle radici; esse interessano talvolta anche le parti aeree della pianta. Alla base dei getti erbacei, sulle grosse diramazioni che formano la base del cespo di medica, si osservano dei tubercoli bianchi e turgidi se giovani, simili a quelli che si osservano negli organi di granoturco colpiti da carbone (fig. 1). La grossezza di essi è varia, in media essi raggiungono il diametro di un pisello; talvolta i tubercoli sono concrezionati in seguito alla fusione di parecchi in un solo. Nei primi esemplari di medica recatimi in esame da un distinto agricoltore di Saletta, si osservavano esclusivamente neoformazioni sul sistema aereo della pianta. In seguito, procedendo all'estirpazione delle piante colle dovute cautele ho potuto constatarne la presenza anche sulle radici.

Sezionando un tubercolo giunto al massimo sviluppo, nella massa di tessuto fondamentale bianco compaiono numerosi puntini o strisce di colore bruno-carico, disposti talora abbastanza simmetricamente, quasi concentricamente intorno all'asse del tubercolo, talaltra invece irregolarmente distribuiti o compenetrati nella massa del tubercolo, stesso in guisa che questo assume

un aspetto cerebriforme. L'esame microscopico rivela che in seno ai tessuti parenchimatici esistono delle cavità od alveoli, limitati da una spessa parete,



Cespo di medica colpito da *Urophlyctis Alfalfae*.

ripieni di grosse spore fornite di uno spesso episporio bruno-carico, di forma rotondeggiante od ovale, depresse da un lato. Tali spore misurano in media $50 \times 40 \mu$; nei tubercoli maturi l'intera massa è formata quasi esclusiva-

mante dalle spore che, in seguito a disfacimento della zona corticale del tubercolo si riversano libere all'esterno.

L'evoluzione e la struttura di questi caratteristici micocecidi, e della *Urophlyctis Alfalfae*, meritano di formar oggetto di ulteriori studi sebbene il Magnus abbia già fornito un notevole contributo in proposito ed io mi riservo di ritornare sull'argomento in ulteriore comunicazione. Per ora ritengo utile di ricordare che tanto Lagerheim quanto lo stesso Magnus indicano l'*Urophlyctis Alfalfae* come un temibile parassita della medica, nelle località ove ne fu segnalata la presenza, e cioè nell'Equatore, a Colmar in Alsazia ed a Basilea: il Magnus soggiunge che, in queste ultime località, i danni recati furono tali da richiamare l'attenzione di due differenti pratici agricoltori.

Lo stesso è successo ora nel caso dell'infezione accertata a Saletta, che fu avvertita nei suoi effetti dal proprietario del fondo. Ho iniziato ora un'inchiesta metodica diretta a definire se il tanto spesso lamentato deperimento dei medicai, quale avvertesi anche in ottime condizioni colturali e che viene ora interpretato, in mancanza di migliore spiegazione, quale conseguenza della stanchezza del suolo, possa attribuirsi, com'è lecito supporre, all'azione nefasta dell'*Urophlyctis Alfalfae*.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Corrispondente BALBIANO, legge la seguente Commemorazione del compianto Corrispondente prof. AUGUSTO PICCINI:

Al tramonto del giorno 16 aprile, testè scorso, mesto e numeroso corteo di ammiratori, allievi, amici e colleghi, accorsi anche da altre città italiane, accompagnava all'ultima dimora la salma di Augusto Piccini, professore di chimica farmaceutica nell'Istituto superiore di Firenze. Una fulminea malattia l'aveva spento nel vigor degli anni e nel pieno sviluppo della sua attività scientifica e didattica.

Il dolore che traspariva dal volto degli amici silenziosi dimostrava chiaramente che il loro pensiero era compenetrato dalla grave perdita che subiva l'istituto nel professore, il paese nel cittadino e nello scienziato. Ed infatti nella sua vita, pur troppo breve, Augusto Piccini fu uomo onesto e buono, professore efficace ed attivo, scienziato entusiasta e di alto valore.

Nato a S. Miniato l'8 maggio 1854, si laureò in chimica nell'Università di Padova nel 1876 ed entrò nell'insegnamento superiore colla nomina a professore di chimica generale all'Università di Catania nel 1885. Tre anni dopo veniva chiamato ad insegnare chimica docimastica nella Scuola degli

ingegneri di Roma e nel 1893 passò a dettare lezioni di chimica farmaceutica nell'Istituto superiore di Firenze.

L'opera scientifica del nostro Collega principia con una breve Nota di fisica stampata nel 1874, riguardante un aerometro a scala arbitraria. Già in questa prima Memoria, scritta con slancio giovanile, si rivelano i segni di chiarezza e di serietà di ragionamento che caratterizzeranno l'opera ulteriore del nostro scienziato.

Dopo una breve punta nel campo della chimica organica pubblicando due Note sulla trasposizione di Hofmann applicata ad alcune amine aromatiche e grasse, in collaborazione col prof. Fileti, il nostro Socio si avvanza risoluto e preparato nel campo della chimica inorganica, dove doveva raccogliere i più cospicui allori.

La ricerca dell'acido nitrico in presenza dell'acido nitroso ed il metodo di dosamento di questi due acidi quando si trovano contemporaneamente presenti, è un lavoro di chimica analitica di grande importanza specialmente per la potabilità delle acque naturali ed è condotto sperimentalmente in modo magistrale, tanto da resistere vittorioso alle critiche del Warington.

Ma le ricerche di maggior importanza e che occuparono per vent'anni la mente del Piccini, furono quelle originate dalla legge periodica del Mendelejeff.

Esposta nel 1869, questa legge che doveva essere ed è tuttora il faro della chimica inorganica, stette per alcuni anni incompresa e trascurata; fu colla scoperta del Gallio seguita da quella dello Scandio, metalli preveduti dalla sistematica Mendeleeviana, che l'attenzione dei chimici venne attratta e la nuova via di ricerca indicata dal chimico russo splendette di luce meridiana.

La mente acuta d'osservatore del nostro Socio, accompagnata da non comune senso critico e sintetico, capì tutta l'importanza del nuovo indirizzo che la legge periodica dava allo sviluppo della chimica inorganica, e fu l'apostolo del chimico russo in Italia. Per penetrare bene ed assimilare i concetti fecondi del grande riformatore si rese famigliare l'idioma russo, come già gli erano noti l'inglese, il tedesco ed il francese.

E nel 1885 potè scrivere quell'importante appendice alla traduzione italiana del trattato di chimica inorganica del Richter, appendice che circoscrisse l'idea di forma limite del Mendelejeff, idea che dette luogo ad una lunga ed animata discussione tra i chimici. Con grande chiarezza il Piccini pose il problema, se i perossidi superiori al limite ordinariamente ammesso, pure avendo tra loro proprietà simili per tutti gli elementi, si distaccino dagli altri ossidi in modo da formare un gruppo a sè facilmente riconoscibile? La risposta ce la dà l'esperienza, egli scrive, ed enumera i modi coi quali praticamente si ottengono questi ossidi, modi che li differenziano nettamente. Orbene questa peculiarità dei perossidi del tipo acqua ossigenata

dagli altri resse fino a 2 anni fa, cioè per più di 20 anni, quando le esperienze del Pissarjewsky dimostrarono che si può ottenere qualcuno di questi perossidi coll'ipoclorito di sodio. E sempre rimanendo fedele all'esperienza ed interpretando i fatti con logica rigorosa, egli prende parte alla discussione vivace della costituzione di questi perossidi, e nell'articolo acqua ossigenata scritto due anni fa per la nuova Enciclopedia di chimica, egli emette l'idea: che gli atomi di ossigeno ch'essa contiene siano in una forma di combinazione inferiore a quella dell'acqua, ipotesi che per la poca diffusione del giornale all'estero, non venne finora discussa come merita, ma ipotesi, come egli argutamente osserva, che ha bisogno di minore sforzo di fantasia e scaturisce direttamente dai fatti.

Tralascio per brevità e perchè troveranno discussione in altra sede più opportuna l'enumerazione degli ulteriori lavori del Piccini, derivanti dalla legge periodica e tendenti ad accumulare nuovi esempi delle parziali analogie che un solo elemento può avere con molti altri, anche di gruppi diversi, quando si considerino le forme simili di combinazione e questi lavori gli diedero tale autorità presso i chimici, che il giudizio sicuro ed imparziale da lui apportato sempre in ogni questione attinente alla sistematica, veniva altamente apprezzato. La morte lo colpì quando appunto aveva terminato di redigere una risposta critica all'ultima Nota del Werner: Beitrag zum Ausbau des periodischen Systems.

L'apparire della nuova teoria delle soluzioni trova il nostro chimico preparato e subito avvia con entusiasmo al nuovo indirizzo chimico-fisico i lavori di ricerca del laboratorio che dirigeva. Ma questo chimico modernissimo che, accettando, discuteva le teorie più recenti, frugava anche nelle biblioteche e decifrava le antiche ricette degli alchimisti, tanto la sua coltura era vasta e non superficiale. Conoscitore a fondo della lingua e letteratura inglese, egli si diletta, nei momenti che la mente riposava dai problemi chimici, a tradurre in versi italiani il poema del Milton, e la versatilità del suo ingegno era tale che letterati, filologi, filosofi si compiacevano alle sue discussioni, piene sempre di vedute originali e di arguzia. Nella sua mente ordinata la coltura classica e la scientifica si fondevano in una mirabile armonia e ne scaturiva il freddo ragionamento dello scienziato riscaldato dall'impeto lirico del poeta, perciò la forma lo entusiasmava e leggeva con pari emozione un brano della statica chimica del Berthollet od una predica dell'abate Bossuet, gustandone da scienziato e da artista le bellezze.

Nell'agosto del 1894, quando la nostra Accademia, onorando sè stessa, lo chiamava a Socio corrispondente della sezione di Chimica, accoglieva nel suo seno un uomo veramente accademico, un sapiente che altamente la onorava. Alla sua dottrina sempre benevola e semplice, ricorrevano per consiglio gli amici, che ora lo piangono, sentendo il vuoto ch'egli ha lasciato nella scienza italiana.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario CERRUTI presenta le varie pubblicazioni giunte in dono, segnalando fra esse, quelle inviate dal Socio TARAMELLI, dai Corrispondenti BASSANI, LUSTIG, PASCAL, SACCARDO e dai Soci stranieri LOCKYER e PFLUEGER. Fa inoltre particolare menzione di due volumi delle: *Oeuvres de La-guerre* e dell'opera: *La Montagne Pelée et ses eruptions* di A. LACROIX, dono dall'Accademia delle Scienze di Parigi, e del vol. X delle *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens*, dono della Società olandese delle scienze.

V. C.
